



18. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1978/1979

Aufgaben





18. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 181221:

Man untersuche, ob es reelle Zahlen b, c, d so gibt, daß durch $a_n = \frac{n+b}{cn+d}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) eine Zahlenfolge definiert ist, für die $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{3}{8}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ gilt.

Wenn es derartige b, c, d gibt, so stelle man fest, ob sie durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind, und gebe sie in diesem Fall an.

Aufgabe 181222:

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x , für die durch $k = \frac{x}{x^2 - 5x + 7}$ eine ganze Zahl k definiert ist.

Aufgabe 181223:

Gegeben seien zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s, t , die einen Winkel einschließen, für dessen Größe α die Ungleichung $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ gilt. Gegeben sei ferner ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Ist g eine Gerade durch P , die s und t schneidet und nicht durch S geht, so bezeichne A bzw. B ihren Schnittpunkt mit s bzw. t .

Man beweise, daß es unter allen diesen Geraden g genau eine gibt, für die das Dreieck SAB einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Man beschreibe eine Konstruktion dieser Geraden.

Aufgabe 181224:

Thomas stellt Jürgen folgende Aufgabe:

- (1) In meiner Klasse betätigen sich genau 15 Schüler im außerschulischen Sport, und zwar kommen nur die Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen bzw. Leichtathletik vor.
- (2) Jede der genannten Sportarten wird von mindestens einem Schüler betrieben.
- (3) Kein Schüler betreibt mehr als zwei dieser Sportarten.
- (4) Jeder Schüler, der Schwimmen oder Leichtathletik betreibt, betätigt sich auch in einer zweiten Sportart.
- (5) Genau 3 Schüler betreiben sowohl Fußball als auch Schwimmen, genau 2 Schüler sowohl Schwimmen als auch Leichtathletik; kein Schüler betreibt sowohl Fußball als auch Turnen.
- (6) Die Anzahl der *Fußballer* ist größer als die Anzahl der *Schwimmer*, diese wiederum ist größer als die Anzahl der *Turner* und diese größer als die Anzahl der *Leichtathleten*.
- (7) Die Anzahl der *Fußballer* ist gleich der Summe der Anzahl der *Turner* und der *Leichtathleten*.



In (6) und (7) bezeichnet *Fußballer*, *Schwimmer* u.s.w. jeweils einen Schüler, der die betreffende Sportart (allein oder neben einer zweiten Sportart) betreibt.

Gib die Anzahl der *Fußballer*, der *Schwimmer*, der *Turner* und der *Leichtathleten* in meiner Klasse an!

Nach einiger Überlegung sagt Jürgen, daß diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar sei. Man ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe.