18. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1978/1979

Aufgaben

18. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 181231:

Man ermittle alle diejenigen Polynome $f(x)$ mit reellen Koeffizienten, die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) - f(x) = x + 1 \quad \text{erfüllen.}$$

Aufgabe 181232:

Im Raum seien A, B zwei verschiedene Punkte und ε eine Ebene.

Für jede mögliche Lage von A, B, ε ermittle man zu diesen gegebenen A, B, ε alle diejenigen Punkte C auf ε, für die die Abstandssumme $\overline{AC} + \overline{BC}$ möglichst klein ist.

Aufgabe 181233:

Es ist zu untersuchen, ob es in einer Menge $\mathfrak{M}$ von 22 222 Elementen 50 Teilmengen $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 50)$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Jedes Element m von $\mathfrak{M}$ ist Element mindestens einer der Mengen $\mathfrak{M}_i$.

(2) Jede der Mengen $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 50)$ enthält genau 1 111 Elemente.

(3) Für je zwei der Mengen $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}_j$ $(i \neq j)$ gilt: Der Durchschnitt von $\mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{M}_j$ enthält genau 22 Elemente.

Aufgabe 181234:

Man beweise: Ist $n \geq 2$ eine ganze Zahl, so ist die für alle reellen x durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(x\sqrt{k}\right)$$

definierte Funktion f nichtperiodisch.

Aufgabe 181235:

Es sei $n \geq 2$ eine gegebene ganze Zahl. Man untersuche, ob sich unter allen denjenigen reellen Zahlen $x_1, \cdots, x_n \geq 0$, für die $x_1 + \cdots + x_n = 1$ gilt, auch solche befinden, für die der Wert von $x_1^3 + \cdots + x_n^3$

a) möglichst groß,

b) möglichst klein ist.

Ist dies der Fall, so ermittle man diesen größten bzw. kleinsten Wert.

Aufgabe 181236A:

Es sei (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ eine Folge reeller Zahlen, für die $a_0 = 0$ sowie $a_{n+1}^3 = \frac{1}{2} \cdot a_n^2 - 1$ für alle $n = 1, 2, ...$ gelte.

Man zeige, daß es dann eine positive reelle Zahl $q < 1$ gibt, so daß für alle $n = 1, 2, ...$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$$

gilt, und gebe eine derartige reelle Zahl q an.

Aufgabe 181236B:

Ist ΔABC ein Dreieck, so bezeichne A' den Bildpunkt von A bei Spiegelung an der Geraden durch B und C, B' den Bildpunkt von B bei Spiegelung an der Geraden durch C und A, C' den Bildpunkt von C bei Spiegelung an der Geraden durch A und B.

Mit diesen Bezeichnungen beweise man:

Genau dann ist $\Delta A'B'C'$ ein zu ΔABC ähnliches Dreieck - mit jeweils A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' als entsprechende Ecken -, wenn ΔABC gleichseitig ist.