18. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1978/1979

Aufgaben

18. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 181241:
Man ermittle alle ganzen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß zu den Polynomen

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^{10} + 11x^3 - x^2 + 23x + 30,$$
$$g(x) = x^3 + 2x + a$$

ein Polynom $h(x)$ so existiert, daß für alle reellen x die Gleichung $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt.

Aufgabe 181242:
Im Staat Wegedonien gibt es ein Straßennetz. An jeder Kreuzung und an jeder Einmündung von Straßen dieses Netzes steht ein Verkehrsposten. Die Länge eines jeden Straßenabschnittes zwischen je zwei benachbarten dieser Posten ist kleiner als 100 km. Jeder Verkehrsposten läßt sich von jedem anderen auf einem Gesamtweg innerhalb des Netzes erreichen, der kürzer als 100 km ist.

Ferner gilt für jeden Straßenabschnitt zwischen zwei benachbarten Verkehrsposten: Wird genau dieser Straßenabschnitt gesperrt, so ist immer noch jeder Verkehrsposten von jedem anderen aus auf einem Gesamtweg erreichbar, der sich nur aus ungesperrten Straßenabschnitten des Netzes zusammensetzt.

Man beweise, daß dies auf einem Weg erfolgen kann, der kürzer als 300 km ist.

Aufgabe 181243:

a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges ebenes konvexes n-Eck E.

   Man beweise folgende Aussage: Sind im Innern oder auf dem Rande von E Punkte Q_1, ... , Q_n so gelegen, daß Q_1, ... , Q_n ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ eine Ecke von E. (1)

b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für welche die Aussage (1) falsch ist.

c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die Aussage (1) falsch?

Aufgabe 181244:
Man beweise, daß für alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m > n$ die durch

$$s(m, n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |i - j|$$

definierte Summe $s(m, n)$ den Wert

$$s(m, n) = \frac{1}{3}(n-1)\,n\,(n+1) + \frac{1}{2}\,m\,n\,(m-n) \quad \text{hat.}$$

Aufgabe 181245:

Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1.

Man zeige, daß es zu jeder der n Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit $a_j = n! + j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ eine Primzahl p_j gibt, die die Zahl a_j, aber keine weiter Zahl a_k $(k \neq j)$ dieser n Zahlen teilt.

Aufgabe 181246A:

Es sei $A_1A_2A_3A_4A_5$ ein regelmäßiges Fünfeck mit gegebener Seitenlänge s. Um jeden Punkt A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sei die Kugel K_i mit dem Radius $\frac{s}{2}$ und dem Mittelpunkt A_i gelegt. Dann gibt es in der Menge derjenigen Kugeln K', die die Eigenschaft haben, jede der fünf Kugeln K_i zu berühren, genau zwei Kugeln K'_1 und K'_2 mit dem Radius $\frac{s}{2}$.

Man untersuche, ob K'_1 und K'_2 einander schneiden, berühren oder ob sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Aufgabe 181246B:

a) Es sei M die Menge aller Tripel (x, y, z) von reellen Zahlen, für die die folgenden Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind:

$$55x + z \leq 54 \qquad (1)$$
$$55y + z \leq 54 \qquad (2)$$
$$55x - 4z \geq 4 \qquad (3)$$
$$55y - 4z \geq 4 \qquad (4)$$
$$z \geq -1 \qquad (5)$$

Man untersuche, ob für den Ausdruck

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (6)$$

ein Tripel $(x_0, y_0, z_0) \in M$ mit der Eigenschaft existiert, daß für alle Tripel $(x, y, z) \in M$ die Ungleichung

$$f(x_0, y_0, z_0) \geq f(x, y, z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_0, y_0, z_0)$.

b) Es sei M' die Menge aller Tripel (x, y, z) von *ganzen* Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind.

Man untersuche, ob für den Ausdruck (6) ein Tripel $(x_1, y_1, z_1) \in M'$ mit der Eigenschaft existiert, daß für alle Tripel $(x, y, z) \in M'$ die Ungleichung

$$f(x_1, y_1, z_1) \geq f(x, y, z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_1, y_1, z_1)$.