19. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1979/1980

Aufgaben

19. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190931:

Beim Lösen einer Gleichung der Form $ax - 6 = bx - 4$ mit gegebenen natürlichen Zahlen a und b stellt Matthias fest:

(1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl x als Lösung.

(2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man - zur Durchführung der Probe - jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung x einsetzt.

Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

Aufgabe 190932:

Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, für das $\overline{AB} = a\sqrt{2}$ und $\overline{BC} = a$ gilt. Es sei F der Mittelpunkt der Seite CD.

Beweisen Sie, daß die Strecken AC und BF senkrecht zueinander verlaufen!

Aufgabe 190933:

Von n Kartons (n eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, daß ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:

Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls $n \geq 2$ ist);
die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls $n \geq 3$ ist);
die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls $n \geq 4$ ist);
...
die ersten $n - 1$ Kartons können nebeneinander in den n-ten gelegt werden.

Beweisen Sie, daß es möglich ist, derartige n Kartons so ineinanderzulegen, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

(1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Karton (wobei auch 0 als gerade Zahl zugelassen ist).

(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.

(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

Aufgabe 190934:

a) Beweisen Sie, daß es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, daß sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

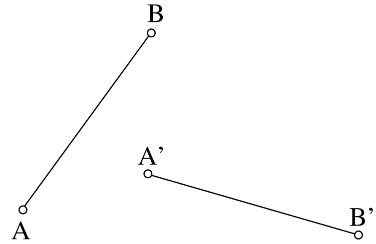
b) Beweisen Sie, daß es für eine geeignete natürliche Zahl $n \geq 3$ im Zahlensystem mit der Basis n eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, daß sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

Aufgabe 190935:

Auf der Abbildung sind zwei zueinander kongruente Strecken AB und $A'B'$ gegeben. Gesucht ist ein Punkt Z der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft:

Es gibt eine Drehung um Z, die A in A' und B in B' überführt.

Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes Z (falls ein solcher existiert)! Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt Z existiert!



Aufgabe 190936:

Für geeignete natürliche Zahlen n gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit n Ecken und weniger als n Flächen. Zum Beispiel ist für $n = 8$ ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.

Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl N die Eigenschaft hat, daß es für *jede* natürliche Zahl $n \geq N$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit n Ecken gibt, der von weniger als n ebenen Flächen begrenzt wird! Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N mit dieser Eigenschaft!