19. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1979/1980

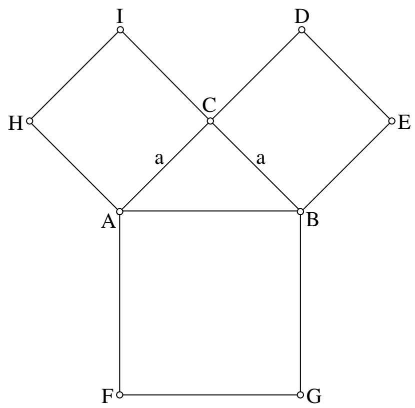
Aufgaben

19. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 191031:

Die Abbildung zeigt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit gegebener Kathetenlänge a, über dessen Seiten nach außen die Quadrate $BCDE$, $ABGF$, $ACJH$ gezeichnet sind.



a) Zeigen Sie, daß es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte D, E, F, G, H und J liegen! Ermitteln Sie (zu gegebenem a) den Durchmesser dieses Kreises!

b) Beweisen Sie: Jeder Kreis, der die Punkte D, E, F, G, H und J in seiner Fläche oder auf seinem Rande enthält und einen anderen Mittelpunkt als der in a) genannte Kreis hat, hat einen größeren Radius als dieser Kreis!

Aufgabe 191032:

Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, für die erstens in der Gleichung

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} + 3^{\sqrt{2x-4y+1}} = 2$$

der Term auf der linken Seite (als reelle Zahl) definiert ist und zweitens diese Gleichung erfüllt ist!

Aufgabe 191033:

Jeder Würfel besitzt sowohl eine Umkugel (d.h. eine Kugel, auf der sämtliche Eckpunkte des Würfels liegen) als auch eine Inkugel (d.h. eine Kugel, die jede Seitenfläche des Würfels berührt). Ebenso besitzt jedes reguläre Oktaeder sowohl eine Umkugel als auch eine Inkugel.

Von einem Würfel und einem regulären Oktaeder werde nun vorausgesetzt, daß die Umkugeln dieser beiden Körper denselben Radius haben.

Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung das Verhältnis $r_1 : r_2$, wobei r_1 der Radius der Inkugel des Würfels und r_2 der Radius der Inkugel des Oktaeders ist!

Aufgabe 191034:

Beweisen Sie folgende Aussage!

Sind A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Kreislinie vom Radius r und hat $\sphericalangle ACB$ die Größe γ, so gilt $\sin\gamma = \frac{\overline{AB}}{2r}$.

Aufgabe 191035:

Von einer Funktion f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen erklärt ist, sei vorausgesetzt, daß folgendes gilt:

(1) Es ist $f(1) = 1$.

(2) Für jedes $x \neq 0$ ist $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$.

(3) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

Beweisen Sie, daß für jede Funktion f, die diese Voraussetzungen erfüllt, $f(\frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$ gilt!

Aufgabe 191036:

Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen a, b und c

$$\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{gilt!}$$