19. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1979/1980

Aufgaben

19. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 191041:

Es seien a, b, c und d beliebig gegebene reelle Zahlen. f und g seien die für alle reellen x durch

$$f(x) = c \cdot 10^{ax}, \qquad g(x) = 10^{bx+d}$$

definierten Funktionen.

Ermitteln Sie (jeweils zu gegebenen a, b, c, d) alle diejenigen Punkte, die der Graph von f mit dem Graph von g gemeinsam hat!

Aufgabe 191042:

Beweisen Sie, daß die folgende Gleichheit gilt!

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - ... + \frac{1}{465} - \frac{1}{466} = \frac{1}{234} + \frac{1}{235} + \frac{1}{236} + ... + \frac{1}{465} + \frac{1}{466}.$$

Aufgabe 191043A:

Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

gilt!

Aufgabe 191043B:

Beweisen Sie, daß es unendlich viele natürliche Zahlen z gibt, für die sich die Gleichung $a^{2m} + b^{2n} + c^{2k} = z$ nicht durch natürliche Zahlen a, b, c, m, n, k erfüllen läßt!

Aufgabe 191044:

Gegeben seien zwei Längen a, b und ein Flächeninhalt $F \leq \frac{1}{2}ab$.

Berechnen Sie aus diesen gegebenen Werten a, b, F alle diejenigen Längen r, die die Eigenschaft haben, daß ein Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r existiert!

Aufgabe 191045:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{x^2 + 5x + 28}$ (als reelle Zahl) definiert ist und die die Gleichung $x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$ erfüllen!

Aufgabe 191046:

Vier Kugeln mit gegebenem Radius r seien so im Raum angeordnet, daß jede von ihnen jede der anderen drei von außen berührt. Die vier Tangentialebenen, die jeweils drei dieser Kugeln berühren und die vierte nicht schneiden, erzeugen dann ein regulärer Tetraeder.

Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders in Abhängigkeit von r!