19. Mathematatik Olympiade

2. Stufe (Kreisolympiade)

Klasse 12

Saison 1979/1980

Aufgaben

19. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 191221:

Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{1}{y} &= 1 \\ y - \frac{1}{z} &= 1 \\ z - \frac{1}{x} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Aufgabe 191222:

Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, seine Fläche also durch die Diagonale AC in zwei Dreiecksflächen, nämlich die des Dreiecks ABC und die des Dreiecks ACD, zerlegt, so werde der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F_1, der des Dreiecks ACD mit F_2 sowie die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ mit α bezeichnet.

Von einem konvexen Viereck $ABCD$ seien nun die folgenden Eigenschaften gefordert:

$$AB \parallel CD, \qquad (1)$$
$$\overline{AB} < \overline{CD}, \qquad (2)$$
$$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}, \qquad (3)$$
$$AC \perp BC. \qquad (4)$$

Man beweise, daß die Forderungen (1) bis (4) erfüllbar sind und daß die Werte von $F_1 : F_2$ und α durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind. Man ermittle diese Werte.

Aufgabe 191223:

100 Touristen sind in 100 verschiedenen Städten beheimatet, in jeder dieser Städte genau einer der Touristen. Keine zwei von ihnen sind miteinander bekannt. Sie unternehmen durch genau diese Städte Rundreisen, und zwar

a) als Touristengruppe (alle 100 Touristen machen gemeinsam ein und dieselben Reisen),

b) als Einzelreisende (jeder legt die Reihenfolge und die jeweilige Aufenthaltsdauer für die einzelnen Städte selbst fest, die Reisen erfolgen unabhängig voneinander).

Ferner treffen sie die folgende sonderbare Vereinbarung: Je zwei dieser Touristen machen sich genau dann miteinander bekannt, wenn sie sich zum ersten Mal gemeinsam in einer Stadt befinden, in der keiner dieser beiden Touristen beheimatet ist.

Ermitteln Sie im Fall a) und im Fall b) jeweils die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, für die die folgende Aussage (*) wahr ist!

(*) Die Reisewege und -termine lassen sich so festlegen, daß jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in n Städten gewesen ist.

Aufgabe 191224:

a) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_1(x) = \frac{\sin(x\sqrt{2})}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_1 periodisch ist.

b) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_2 periodisch ist.