19. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1979/1980

Aufgaben

19. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 191231:

Es seien n und m natürliche Zahlen mit $n \geq 1$, $m \geq 1$; N sei die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n und M die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis m.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von N, die gemeinsame Elemente mit M haben.

Aufgabe 191232:

Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, auf dessen Kanten AB, BC, CD bzw. DA Punkte E, F, G bzw. H so gelegen sind, daß sie die entsprechende Kante jeweils im Verhältnis der Längen der anliegenden Kanten teilen, d.h. es wird vorausgesetzt:

$$\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{DA} : \overline{BC}; \quad \overline{BF} : \overline{FC} = \overline{AB} : \overline{CD}; \quad \overline{CG} : \overline{GD} = \overline{BC} : \overline{DA}; \quad \overline{DH} : \overline{HA} = \overline{CD} : \overline{AB}. \tag{1}$$

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage wahr ist:

Im Viereck $ABCD$ gilt $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$ (d.h. $ABCD$ ist ein Tangentenviereck) genau dann, wenn im Viereck $EFGH$ für die Größe der Innenwinkel $\overline{\sphericalangle EFG} + \overline{\sphericalangle GHE} = \overline{\sphericalangle FGH} + \overline{\sphericalangle HEF}$ gilt (d.h. wenn $EFGH$ ein Sehnenviereck ist).

Aufgabe 191233A:

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Für alle Paare $(x_1; x_2)$ reeller Zahlen gilt $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

(3) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$.

Aufgabe 191233B:

Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n gibt, für die

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n^2} > 1\,000 \tag{1}$$

gilt. Wenn dies der Fall ist, so untersuche man, ob es eine natürliche Zahl p derart gibt, daß jede (im Dezimalsystem) p-stellige Zahl n die Eigenschaft (1) hat. Trifft auch das zu, so ermittle man eine derartige Zahl p.

Aufgabe 191234:

Man untersuche, ob unter allen Tetraedern $ABCD$ mit gegebenem Volumen V und mit rechten Winkeln $\sphericalangle BDC$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle ADB$ eines mit kleinstmöglicher Summe $\overline{AD} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CD}$ existiert.

Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von V) diese kleinstmögliche Summe.

Aufgabe 191235:

Man beweise: Es gibt keine positiven ganzen Zahlen p und q mit der Eigenschaft

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}.$$

Aufgabe 191236:

Gegeben sei eine positive reelle Zahl a.

Man ermittle (zu jedem Wert dieser gegebenen Zahl a jeweils) alle reellen Lösungen $(x; y)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= 1, \\ x + y &= a. \end{aligned}$$