20. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1980/1981

Aufgaben

20. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 201031:

In einem Stadtbezirk Berlins nahmen in der Olympiadeklasse 10 insgesamt 50 Schüler an der 2. Stufe der OJM teil. Die folgenden Angaben beziehen sich auf diesen Teilnehmerkreis:

(1) Es nahmen ebensoviel Jungen wie Mädchen teil.

(2) Genau 24 der Teilnehmer, darunter genau 15 Jungen, waren Mitglieder einer AG Mathematik.

(3) Genau 13 der Teilnehmer erhielten Preise oder Anerkennungsurkunden. (Diese 13 Teilnehmer werden im folgenden "Preisträger" genannt.)

(4) Genau 12 der Preisträger waren Mitglieder einer AG Mathematik.

(5) Genau 6 der Preisträger waren Mädchen.

(6) Es waren nur solche Mädchen Preisträger, die einer AG Mathematik angehörten.

Ermitteln Sie die Anzahl derjenigen teilnehmenden Jungen, die weder Preisträger waren noch einer AG Mathematik angehörten!

Aufgabe 201032:

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$2y + x < 20, \qquad (1)$$
$$y - x < 4, \qquad (2)$$
$$y - ax \geq 6. \qquad (3)$$

Aufgabe 201033:

Gegeben sei ein Punkt P in einer Ebene ε. Untersuchen Sie, ob es in ε ein Quadrat $ABCD$ gibt, für das $\overline{PA} = \sqrt{2}$ cm, $\overline{PB} = \sqrt{5}$ cm, $\overline{PC} = \sqrt{8}$ cm gilt!

Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie für jedes derartige Quadrat seine Seitenlänge!

Aufgabe 201034:

Ermitteln Sie alle Tripel (a, h, x) von Null verschiedener natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft!

Wenn a und h die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Grundkantenlänge bzw. Höhenlänge einer geraden quadratischen Pyramide sind, dann hat sowohl die in Quadratzentimeter gemessene Oberfläche als auch das in Kubikzentimeter gemessene Volumen dieser Pyramide die Maßzahl x.

Aufgabe 201035:

Tausend reelle Zahlen x_1, x_2, ..., $x_{1\,000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, daß $x_1 = 3$ und für alle $n = 1, 2, ..., 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$$

gelten soll.

Beweisen Sie, daß (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, ..., 1\,000$ die Ungleichung $x_n > 2$ gilt!

Aufgabe 201036:

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC, in dem die Längen a, b, c der Seiten BC, CA, AB und die Größen β, γ der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ die Bedingungen $a = 8$ cm, $b + c = 12$ cm, $\beta + \gamma = 100°$ erfüllen!

Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie, daß alle Dreiecke, die diesen Bedingungen genügen, einander kongruent sind!

Hinweis: In dieser Aufgabe werden auch Dreiecke ABC, $A'B'C'$ als "einander kongruent" bezeichnet, bei denen A', B', C' in irgendeiner anderen Reihenfolge mit A, B, C zur Deckung gebracht werden können.