20. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1980/1981

Aufgaben

20. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 201041:

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen a_1, a_2, ..., a_n und b für die

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = b^2 \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 201042:

Gegeben sei eine Länge r_1.

Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $\overline{CD} < \overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BC}$, in dem ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und ein zweiter Kreis k_2 so liegen, daß sie einander von außen berühren und daß k_1 die Seiten AD, AB und BC berührt, k_2 die Seiten BC, CD und AD berührt!

Begründen und beschreiben Sie die Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften gibt!

Aufgabe 201043A:

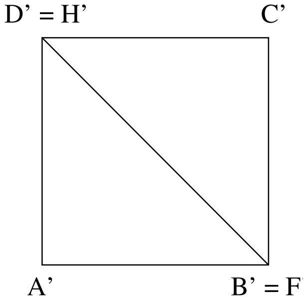
Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist!

$$x \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2 \log_y(5 - \sqrt{24}), \tag{1}$$
$$y - x = 2 \tag{2}$$

Aufgabe 201043B:

Beweisen Sie, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl $625 + 4(9^{2n})$ eine Primzahl sein kann!

Aufgabe 201044:



Ein ebenflächig begrenzter Körper mit genau 6 Ecken A, B, C, D, F, H soll den im Bild dargestellten Grundriß haben. ($A'B'C'D'$ ist dabei ein Quadrat von gegebener Seitenlänge a.) Die Punkte A, B, C, D sollen in der Grundrissebene liegen, die Punkte F und H im Abstand a über B bzw. D.

Jede Kante des Körpers soll im Bild sichtbar dargestellt sein (entweder als Strecke oder, wenn sie senkrecht zur Grundrissebene verläuft, als Punkt), auch wenn sie etwa von oben betrachtet durch andere Flächen verdeckt wird. Stellen Sie zwei Körper, die diese Forderungen erfüllen und voneinander verschiedene Volumina haben, in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 60°, q = \frac{1}{2}$) dar! Ermitteln Sie für jeden der beiden dargestellten Körper sein Volumen!

Aufgabe 201045:

Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1\,000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, daß $x_1 = 5$ und für alle $n = 1, 2, ..., 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n} \quad \text{gelten soll.}$$

Beweisen Sie, daß (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, ..., 1\,000$ die Ungleichung $4 \leq x_n \leq 5$ gilt!

Aufgabe 201046:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$y > x^2 - 2x + c, \qquad (1)$$

$$y < x + c, \qquad (2)$$

$$y < -2x + 1. \qquad (3)$$