20. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1980/1981

Aufgaben

20. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 201231:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die das folgende System von Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x^4 + x^2 - 2x \geq 0, \tag{1}$$
$$2x^3 + x - 1 < 0, \tag{2}$$
$$x^3 - x > 0. \tag{3}$$

Aufgabe 201232:
Es sei f die durch

$$f(x) = x^4 - (x+1)^4 - (x+2)^4 + (x+3)^4$$

definierte Funktion, wobei der Definitionsbereich von f

a) die Menge aller ganzen Zahlen,

b) die Menge aller reellen Zahlen

ist.

Man untersuche sowohl für den Fall a) als auch für den Fall b), ob die Funktion f einen kleinsten Funktionswert annimmt, und ermittle, falls das zutrifft, jeweils diesen kleinsten Funktionswert.

Aufgabe 201233A:
Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:

Für alle reellen Zahlen a und b mit $0 < a < b$ gilt

$$a + \frac{1}{1 + a^n} < b + 11 + b^n.$$

Aufgabe 201233B:
Ist f eine im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktion, so seien für sie die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) betrachtet:

(1) Für jedes reelle x mit $0 \leq x \leq 1$ gilt $f(x) \geq 0$.

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

(3) Für jedes reelle x_1 mit $0 \leq x_1 \leq 1$ und jedes reelle x_2 mit $0 \leq x_2 \leq 1$ und $x_1 + x_2 \leq 1$ gilt $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

a) Man beweise: Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x) < 2x$ für jedes reelle x mit $0 < x \leq 1$.

b) Man überprüfe, ob auch die folgende Aussage wahr ist:

Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x) \leq 1,99 \cdot x$ für jedes reelle x mit $0 < x \leq 1$.

Aufgabe 201234:

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen k, für die die Gleichung

$$\frac{x}{k-4} + \frac{k}{2\,(k-4)} + \frac{k+4}{x} = 0$$

lösbar ist (d.h. mindestens eine Lösung x besitzt), wobei alle Lösungen x ganzzahlig sind.

Aufgabe 201235:

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die folgende Aussage gilt:

Wenn die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks gleich $3n$ ist, dann gibt es kein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes dieses Vielecks rationale Zahlen sind.

Aufgabe 201236:

Man zeige, daß zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ und jeder natürlichen Zahl $B > 1$ eine natürliche Zahl $C \geq 1$ existiert, die im Positionssystem mit der Basis B nur aus Ziffern *Null* und *Eins* besteht und durch n teilbar ist.