# 20. Mathematik Olympiade
# 4. Stufe (DDR-Olympiade)
# Klasse 12
# Saison 1980/1981

Aufgaben

# 20. Mathematik-Olympiade
# 4. Stufe (DDR-Olympiade)
# Klasse 12
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 201241:

In einem beliebigen Dreieck $ABC$ seien $D$, $E$, $F$ die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Dreieckseiten.

Man beweise: Sind $I$ der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ und $I_1$ der Flächeninhalt des Dreiecks $DEF$, so gilt $I_1 \leq \frac{I}{4}$.

Aufgabe 201242:

In einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung. Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen. Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.

Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!

*Hinweis:* Die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit $p$ ist folgendermaßen definiert: Es sei $A$ die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme von 57 Karpfen aus den drei Behältern. Ferner sei $G$ die Anzahl aller derjenigen unter diesen Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist. Dabei gelten zwei mögliche Reihenfolgen der Entnahme genau dann als gleich, wenn sie für jedes $i = 1, 2, ..., 57$ in der Angabe übereinstimmen, aus welchem Behälter die $i$-te Entnahme eines Karpfen erfolgte. Mit diesen Bezeichnungen ist $p = \frac{G}{A}$.

Aufgabe 201243:

Gegeben sei eine reelle Zahl $a \neq 0$ mit $|\,a\,| \neq 1$. Man ermittle alle reellen Lösungen $x$ der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2}.$$

Aufgabe 201244:

Es sei $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, ... diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2+1} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \quad \text{gilt.}$$

Man ermittle alle diejenigen Glieder dieser Folge, die ganzzahlig sind.

Aufgabe 201245:

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - \left[\sqrt{k-1}\right]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \tag{1}$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$ (d.h. einen Ausdruck, der $f(n)$ in Abhängigkeit von $n$ so darstellt, daß zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von $n$ abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).

*Hinweis:* Ist $x$ eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet $[x]$ diejenige ganze Zahl, für die $[x] \leq x < [x]+1$ gilt.

Aufgabe 201246A:

Eine Strecke $AB$ von 10 m Länge soll auf folgende Weise durch *wiederholtes Halbieren* in 10 näherungsweise gleichlange Strecken zerlegt werden:

(1) Zunächst wählt man beliebige Punkte $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}$, ..., $P_9^{(0)}$ auf der Strecke $AB$ und definiert $P_0^{(0)} = A$ und $P_{10}^{(0)} = B$.

(2) Liegen nun für eine natürliche Zahl $n$ bereits als *n-te Näherung* Punkte $P_0^{(n)}$, $P_1^{(n)}$, ..., $P_{10}^{(n)}$ vor, so definiert man $P_0^{(n+1)} = A$, $P_{10}^{(n+1)} = B$ sowie für $j = 1, 2, ..., 9$ jeweils $P_j^{(n+1)}$ als Mittelpunkt der Strecke $P_{j-1}^{(n+1)} P_{j+1}^{(n)}$.

Es seien $Q_1$, $Q_2$, ..., $Q_9$ die Punkte auf $AB$, die $AB$ in 10 genau gleich lange Teilstrecken zerlegen, für die also $\overline{AQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = ... = \overline{Q_8Q_9} = \overline{Q_9B} = 1$ m gilt.

Beweisen Sie, daß eine natürliche Zahl $N$ so existiert, daß für jede Wahl der Punkte $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}$, ..., $P_9^{(0)}$ auf $AB$ gilt: Bei der *n-ten Näherung* weicht jeder der Punkte $P_j^{(N)}$ $(j = 1, 2, ..., 9)$ um weniger als 1 mm von der Lage des Punktes $Q_j$ ab, d.h., es gilt $\overline{P_j^{(N)}Q_j} < 1$ mm.

Aufgabe 201246B:

Ist $T = ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichne $s$ die Summe aller Kantenlängen von $T$. Dabei sei in dieser Aufgabe jede (in Zentimeter zu messende) Kantenlänge nur durch ihre Maßzahl angegeben.

Man untersuche, ob es unter allen Tetraedern $T$ mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) eines gibt, für das $s$ einen größten Wert annimmt. Trifft das zu, so ermittle man diesen größten Wert von $s$.

Die geforderten Eigenschaften sind:

(1) $\overline{\sphericalangle BDC} = \overline{\sphericalangle CDA} = \overline{\sphericalangle ADB} = 90°$.

(2) Sämtliche Kantenlängen von $T$ sind nicht kleiner als $\frac{1}{6}$.

(3) Das Volumen von $T$ ist gleich $\frac{1}{6}$.