21. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1981/1982

Aufgaben

21. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 211011:

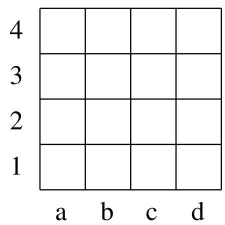
Ein Reisender legte den ersten Teil einer Dienstfahrt mit dem PKW und den Rest mit dem Zug zurück.

Als er die mit dem PKW zurückgelegte Teilstrecke sowie genau ein Fünftel der Bahnstrecke durchfahren hatte, stellte er fest, daß er zu diesem Zeitpunkt genau ein Drittel der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte. Später, als er genau die Hälfte der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte, war er mit dem Zug bereits 20 km mehr gefahren als zuvor mit dem PKW.

Wie lang war die Gesamtstrecke dieser Reise?

Aufgabe 211012:

Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 16 untereinander kongruente quadratische Felder $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, ... , $d1$, $d2$, $d3$, $d4$ zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau vier so markiert werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.



Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie aus einander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Aufgabe 211013:

Für Kreisflächen ist bekanntlich der Begriff des Durchmessers definiert. Man kann aber auch für andere Flächenstücke F eine "längste Strecke" als "Durchmesser" bezeichnen.[1]

Ist beispielsweise F die Fläche eines Dreiecks ABC (einschließlich des Randes) und gilt $\overline{AB} \geq \overline{AC}$ sowie $\overline{AB} \geq \overline{BC}$, so ist die Länge $\overline{AB}$ der Durchmesser d von F; denn dann läßt sich beweisen, daß für beliebige Punkte X, Y der Dreiecksfläche F stets $\overline{AB} \geq \overline{XY}$ ist.

Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden Aussagen (1), (2) wahr sind!

(1) Man kann nicht jede Dreiecksfläche F so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen, daß jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

(2) Es gibt eine Dreiecksfläche F, die man so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen kann, daß jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

[1] Das heißt man kann definieren: Wenn es zwei Punkte P, Q in F mit der Eigenschaft gibt, daß für beliebige Punkte X, Y in F stets $\overline{PQ} \geq \overline{XY}$ gilt, so heißt die Länge $d = \overline{PQ}$ der "Durchmesser" von F.

Aufgabe 211014:

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g, die im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ durch $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$ definiert sind!

b) Im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ seien nun durch $h(x) = f(g(x))$, $k(x) = g(f(x))$ zwei weitere Funktionen h und k definiert.

Hinweis: Man erhält also z.B. den Funktionswert $h(x)$ zu einer Zahl x des Intervalls stets dadurch, daß man erst den Wert $z = g(x)$ und dann $f(z) = f(g(x)) = h(x)$ bildet. So ist etwa für $x = -1$ erst $z = g(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$ und dann $h(-1) = g(6) = |6| = 6$ zu bilden. Entsprechend erhält man $k(-1) = g(f(-1)) = g(|-1|) = g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.

Zeichnen Sie die Graphen der so definierten Funktionen h und k und beschreiben Sie, wie man diese Graphen dadurch aus dem Graphen von g gewinnen kann, daß man auf Teilstücke des Graphen von g geeignete Spiegelungen anwendet!