21. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1981/1982

Aufgaben

21. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 211031:
Ermitteln Sie alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften!

(1) Es gilt $0 < a \leq b \leq c$.

(2) In einem Quader mit der Länge a cm, der Breite b cm und der Höhe c cm beträgt die Summe aller Kantenlängen ebenso viele Zentimeter, wie das Volumen Kubikzentimeter beträgt.

Aufgabe 211032:
Beweisen Sie den folgenden Satz (den sogenannten Satz von Menelaos)!

Wenn eine Gerade g die Seite BC eines Dreiecks ABC in einem Punkt E zwischen B und C schneidet und wenn g außerdem die Seite CA in einem Punkt F zwischen C und A schneidet und wenn g außerdem eine Verlängerung der Seite AB in einem Punkt G schneidet, dann gilt

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = 1.$$

Aufgabe 211033:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen!

$$[a] + 2b = 6,6$$
$$[2a] + 3b = 11,9.$$

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird mit $[r]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet, für die $g \leq r < g + 1$ gilt. So ist z.B. $[4,01] = 4$, da $4 \leq 4,01 < 5$ gilt; $[7] = 7$, da $7 \leq 7 < 8$ gilt; $[-\pi] = -4$, da $-4 \leq -\pi < -3$ gilt.

Aufgabe 211034:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x} < 1 \quad \text{erfüllen!}$$

Aufgabe 211035:
In der 1. Stufe der Mathematikolympiade gab es im Jahre 1976 in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe:

"Jemand behauptet, daß es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen: Man teile einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, dann wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke in jeweils genau 7 Teile u.s.w. Ist es möglich, daß man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?"

Als Lösung musste bewiesen werden, daß es nicht möglich ist, genau 1976 Papierstücke zu erhalten. Wir wollen jetzt für irgendeine Zahl $n \geq 1$ von n Papierstücken ausgehen und diese in der beschriebenen Weise jeweils in genau n Teile teilen.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n < 1976$, für die es auf diese Weise gelingen kann, genau 1976 Papierstücke zu erhalten!

Aufgabe 211036:

Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$ und ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABC seien so im Raum gelegen, daß sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D' bzw. P' haben. Ein Punkt Q liege auf der Strecke BC; ein Punkt R liege auf der Strecke CD; ihre Bildpunkte seien bei der Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Punkte Q' bzw. R'. Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.

Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß eine Figur die gesuchte Projektion der Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt zu 211036