21. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1981/1982

Aufgaben

21. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 211041:

Ermitteln Sie alle Paare $(a;b)$ aus positiven ganzen Zahlen a, b, die die Eigenschaft haben, daß von den folgenden vier Aussagen (1), (2), (3), (4) genau drei wahr sind und eine falsch ist!

Die Aussagen lauten:

(1) $b \mid (a+1)$,

(2) $a = 2b+5$,

(3) $3 \mid (a+b)$,

(4) $a+7b$ ist eine Primzahl.

Aufgabe 211042:

Definition: Eine Länge d heißt *Durchmesser* einer Punktmenge M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X, Y aus M gilt: Der Abstand $\overline{XY}$ zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $\overline{XY} \leq d$.

(2) Es gibt zwei Punkte P, Q aus M, deren Abstand $\overline{PQ} = d$ beträgt.

Aufgabe: Untersuchen Sie, ob man jede Vierecksfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, daß jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat! Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)

Aufgabe 211043A:

In einem Mathematikzirkel wird über nichtkonstante Funktionen diskutiert, die für alle reellen Zahlen definiert sind und deren Funktionswerte wieder reelle Zahlen sind.

Sind f und g zwei solche Funktionen, so kann man die Funktion F für alle reellen x durch $F(x) = f(g(x))$ definieren.

Die Diskussion beschäftigt sich mit der Frage, ob derartige Funktionen f, g, F periodisch sind. (Bekanntlich heißt eine Funktion ρ genau dann periodisch, wenn eine reelle Zahl $p > 0$ so existiert, daß für alle x die Gleichung $\rho(x+p) = \rho(x)$ gilt.)

Jens behauptet: Ist g eine periodische Funktion (und f periodisch oder nicht), so ist auch stets die - wie oben erklärte - Funktion F periodisch.

Dirk behauptet: Ist f eine periodische Funktion (und g periodisch oder nicht), so ist auch stets die Funktion

F periodisch. Christa behauptet: Sind beide Funktionen f und g nicht periodisch, so ist auch stets F nicht periodisch.

Untersuchen Sie für jeden dieser drei Schüler, ob er damit eine wahre oder eine falsche Aussage gemacht hat!

Aufgabe 211043B:

Beweisen Sie, daß man auf der Oberfläche einer Kugel, die den Radius r hat, 12 Punkte P_1, P_2, ... , P_{12} so verteilen kann, daß für je zwei dieser Punkte ihr Abstand voneinander größer als r ist!

Dabei wird als Abstand zwischen zwei Punkten die Länge ihrer geradlinigen Verbindungsstrecke bezeichnet (nicht etwa ein Bogen auf der Kugeloberfläche).

Aufgabe 211044:

Mehrere Personen spielen ein Spiel mit drei Würfeln, auf deren Seitenflächen anstelle der üblichen Zahlen Buchstaben stehen. Auf jedem Feld steht genau ein Buchstabe; jeder Buchstabe kommt nur einmal vor. Nach jedem Wurf muß der Spieler versuchen, aus den drei Buchstaben, die oben liegen, ein Wort zu bilden.

Untersuchen Sie, ob eine Verteilung von Buchstaben auf die Würfel derart möglich ist, daß mit den so beschrifteten Würfeln im Laufe des Spiels auf diese Weise die Wörter

$$AUF,\quad BEI,\quad BEN,\quad CUP,\quad GER,\quad ICH,\quad IDA,\quad IST,\quad MAN,\quad NOT,\quad TOR,\quad ZUG$$

gebildet werden können! Wenn dies der Fall ist, so untersuchen Sie, ob die Verteilung der Buchstaben auf die Würfel aus den genannten Angaben eindeutig hervorgeht, d.h., ob für jeden der drei Würfel (bis auf die Reihenfolge) eindeutig folgt, welche Buchstaben auf ihm stehen! Ist auch dies der Fall, so ermitteln Sie diese Verteilung!

Aufgabe 211045:

Ermitteln Sie alle Mengen a, b, c aus positiven ganzen Zahlen a, b, c, die jeweils zusammen mit der Zahl $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ die Gleichung

$$\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 2s \qquad \text{erfüllen!}$$

Aufgabe 211046:

Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$, ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABD, ein Punkt Q auf der Fläche des Dreiecks BCD und ein Punkt R auf der Fläche des Dreiecks ACD seien so im Raum gelegen, daß sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D', P', Q' bzw. R' haben (siehe Abbildung). Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.

Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, daß eine Figur die gesuchte Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt für 211046