21. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1981/1982

Aufgaben

21. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 211221:

Sind a_1 und d gegebene reelle Zahlen, so sei (a_n) die arithmetische Zahlenfolge mit $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, 3, ...$ Ferner werde für $n = 1, 2, 3, ...$ definiert:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad z_n = \sum_{k=1}^{n} s_k.$$

a) Man ermittle a_1 und d so, daß $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$ gilt.

b) Man beweise, daß für beliebige reelle a_1, d und alle $n = 1, 2, 3, ...$

$$z_n = \frac{n(n+1)}{2}(a_1 + \frac{n-1}{3}d) \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 211222:

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{2x^2-1} < \frac{1}{x}$ gilt.

Aufgabe 211223:

Es sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Seine Seitenlängen seien a, b, c, d; sein Flächeninhalt sei F.

Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt

$$F \leq \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right). \tag{1}$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Vierecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 211224:

Man beweise: Für jede ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-1)$$

eine durch n teilbare ganze Zahl.