22. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1982/1983

Aufgaben

22. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220931:

Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen z, die die Gleichung $z = (a+b)^c$ erfüllen, wobei a, b und c in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von z sind.

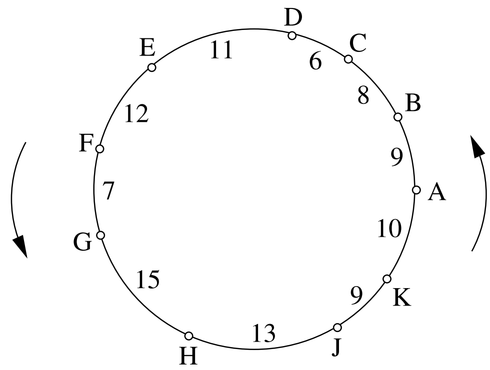
Aufgabe 220932:

Über zwei Kreise k_1, k_2 und ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 wird vorausgesetzt, daß der Kreis k_2 durch den Punkt M_1 geht und den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt. Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1 und k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 und P_2 genannt.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht!

Aufgabe 220933:

Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße vom 1 000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos A, B, C, D, E, F, G, H, J und K. Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich. Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, daß ein beliebiges der zehn Autos die 1 000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglängen zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.



Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1 000 km dadurch zurücklegen kann, daß es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)

Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

Aufgabe 220934:

Jens behauptet, daß man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Dirk behauptet dagegen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Wer hat recht?

Aufgabe 220935:

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien k_1 und k_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien P und Q.

Beweisen Sie, daß für jeden Punkt S der Kugeloberfläche die Summe $\overline{PS}^2 + \overline{QS}^2$ denselben Wert hat! Ermitteln Sie diesen Wert!

Hinweis:

1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z.B. $\overline{PS}$, $\overline{PQ}$ seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

Aufgabe 220936:

Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{BC} = a$ gegeben. Die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ABC$ mögen einander in P schneiden. Durch P sei die Parallele zu AB gelegt. Sie schneide AC in Q und BC in R.

Ermitteln Sie die Länge $\overline{QR}$ in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!