22. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1982/1983

Aufgaben

22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 221011:

In einer Abteilung eines VEB werden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 hergestellt. Aus der nachfolgenden Tabelle sind die täglich anfallenden Rohstoff-, Energie- und Lohnkosten in Mark je Stück der drei Erzeugnisse ersichtlich. Ferner ist die Gesamthöhe der Mittel angegeben, die täglich für Rohstoffe, Energie und Löhne zur Verfügung stehen.

Beweisen Sie, daß es möglich ist, die täglich zu produzierenden Stückzahlen der Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 so festzusetzen, daß alle zur Verfügung stehenden Mittel, die hier genannt sind, restlos ausgeschöpft werden!

Beweisen Sie, daß durch diese Forderung des Ausschöpfens die Stückzahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie diese!

Kostenart	Kosten in M je Stück für			Insgesamt zur Verfügung stehende Mittel in Mark
	E_1	E_2	E_3	
Rohstoffkosten	6	7	9	4 950
Energiekosten	1	2	2	1 100
Lohnkosten	5	6	8	4 300

Aufgabe 221012:

In einer Diskussion über irrationale Zahlen wurde erwähnt, daß $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ irrational sind.

Peter meinte: "Dann muß auch $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational sein." "Wie beweist du das?" fragte Katrin. "Es gibt doch keinen Satz, wonach stets dann $x+y$ irrational sein muß, wenn x und y irrational sind." "Ja, aber speziell für die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ kann ich beweisen, daß auch ihre Summe $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational ist", erwiderte Peter.

a) Bestätigen Sie durch ein Beispiel Katrins Meinung, daß es irrationale Zahlen x, y mit rationaler Summe $x+y$ gibt!

b) Wie könnte Peter den von ihm angekündigten Beweis führen?

Aufgabe 221013:

Zehn kleine Zifferlein

Wilhelm Busch gab ein Exempel
durch den braven Lehrer Lämpel.
Welcherart man soll sich plagen,
ließ er einstmals so ihn sagen:

"Nicht allein im Schreiben, Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen,
sondern auch in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen."
Liest man dieses umgekehrt,
ist es sicher auch viel wert:
"Nicht allein in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen,
sondern ein vernünftig Wesen
soll auch manchmal etwas lesen."
Darum zögert bitte nicht,
lest zuerst mal dies Gedicht!

Erstens sei sogleich gesagt,
daß nach Zahlen wird gefragt.
Unter diesen sei'n vorhanden
zwei dreistellige Summanden.
Der Summe wir nun unterstellen
(da 's möglich ist in vielen Fällen),
sie habe eine Stelle mehr.

Jetzt ist es sicher nicht sehr schwer
zu zählen, daß zehn Ziffern man
für diesen Fall gut brauchen kann:
Die Ziffern sei'n 's von 0 bis 9,
die uns zu diesem Zweck erfreun!
Und jede Ziffer treffe man
in dieser Rechnung einmal an,
und zwar genau (wie man so sagt)!
Damit auch später keiner fragt:
Die 0 würd' vorne sehr schlecht passen,
drum ist sie dort nicht zugelassen.
Genau ein Übertrag auch sei,
nicht etwa zweie oder drei!
(Ein Übertrag - das sei erklärt,
damit es jedermann erfährt -,
das ist ein Fall, der dann passiert,
wenn jemand Zahlen hat addiert
und ihre Summe, wie sich zeigt
die 9 an Größe übersteigt.)

Nun, liebe Tochter, lieber Sohn,
was kann bei dieser Addition
man für Ergebnisse erwarten?

Jetzt dürft ihr mit dem Lösen starten.
Als Lösung seien angegeben
- zumindest soll man danach streben -
alle möglichen E n d beträge!
Dabei beweise man recht rege,
daß es, hält man die Regeln ein,
n u r d i e s e Summen können sein.
(Der Summanden vielfache Möglichkeiten
sollen uns keine Sorgen bereiten,
nach ihnen ist hier n i c h t gefragt.)

Nun frisch ans Werk und nicht verzagt!
Denn nicht alleine nur im Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen ...

Aufgabe 221014:

Es sei r der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Zehnecks $P_1P_2...P_{10}$ und s die Länge einer Seite dieses Zehnecks.

Berechnen Sie s in Abhängigkeit von r!