



22. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1982/1983

Aufgaben





22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 221021:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen.

Aufgabe 221022:

Es seien 64 paarweise verschiedene Zahlen beliebig gewählt und dann so auf die Felder eines Schachbretts verteilt, daß in jedem Feld genau eine dieser Zahlen steht. Für jede derartige Zahlenverteilung werden nun folgende Definitionen gegeben:

1. Man suche zunächst in jeder (waagerechten) Zeile des Schachbretts die größte Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die kleinste mit a bezeichnet.
2. Man suche zunächst in jeder (senkrechten) Spalte des Schachbretts die kleinste Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die größte mit b bezeichnet.

Axel behauptet über die so definierten Zahlen a und b : "Wenn $a \neq b$ ist, dann muß sogar stets $a > b$ gelten."

Untersuchen Sie, ob dies zutrifft oder nicht!

Aufgabe 221023:

Von einem rechtwinkligen Dreieck wird gefordert:

- (1) Der Umfang des Dreiecks beträgt 132 cm.
- (2) Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks beträgt $6\,050\text{ cm}^2$.

Beweisen Sie, daß es rechtwinklige Dreiecke gibt, die die Forderungen (1) und (2) erfüllen, und daß die Längen der Dreiecksseiten durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind! Geben Sie diese Seitenlängen an!

Aufgabe 221024:

Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck, sein Flächeninhalt F_1 . Mit F_2 sei der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks ACE und mit F_3 der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks $M_1M_2M_3$ bezeichnet, wobei M_1, M_2, M_3 in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, CD bzw. EF seien.

Berechnen Sie das Verhältnis $F_1 : F_2 : F_3$!

(Das Verhältnis soll durch drei möglichst kleine natürliche Zahlen ausgedrückt werden.)