22. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1982/1983

Aufgaben

22. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 221031:

Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x, y, z, u, v) aus natürlichen Zahlen, für die

$$0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v \quad \text{und}$$
$$x + y + z + u + v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 221032:

Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises k. Auf der Kreislinie k seien zwei Punkte A und B so gelegen, daß M nicht auf der Geraden g durch A, B liegt.

Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen die folgende Umkehrung des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel!

Wenn für einen Punkt P, der bezüglich g in derselben Halbebene wie M liegt, der Winkel $\sphericalangle APB$ halb so groß ist wie $\sphericalangle AMB$, dann liegt P auf der Kreislinie k.

Aufgabe 221033:

Beweisen Sie, daß $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist!

Aufgabe 221034:

Beweisen Sie folgende Aussage:

In einem Quadrat mit der Seitenlänge a gibt es zehn Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, daß je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}a$ zueinander haben.

Aufgabe 221035:

Untersuchen Sie, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = 1981x^4 + 1979x^3 + 1982x^2 + 1978x + 1980$$

definierte Funktion f eine Nullstelle hat!

Aufgabe 221036:

Aus einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a soll ein reguläres Tetraeder herausgeschnitten werden.

Beweisen Sie, daß es ein solches Tetraeder mit möglichst großer Kantenlänge gibt! Ermitteln Sie diese Kantenlänge in Abhängigkeit von a!