22. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1982/1983

Aufgaben

22. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 221041:

Beweisen Sie folgende Aussage!

Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen a_1, a_2, ..., a_n, für die $a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ gilt.

Aufgabe 221042:

In einem Mathematikzirkel wird diskutiert, für welche Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$ die Zahl $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$ irrational ist.

Rolf meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z rational.

Eva meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z irrational.

Untersuchen Sie sowohl für Rolfs als auch für Evas Meinung, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 221043A:

a) Jemand fragt nach reellen Zahlen a, b mit der Eigenschaft, daß die Gleichung

$$a^x = b \cdot \cos x \tag{1}$$

genau 1983 positive reelle Lösungen x hat (unabhängig von der Anzahl der eventuell vorhandenen nicht positiven Lösungen).

Geben Sie ein solches Paar $(a; b)$ reeller Zahlen an und beweisen Sie, daß es die genannte Eigenschaft besitzt!

b) Ermitteln Sie zu dem von Ihnen angegebenen Paar $(a; b)$ für eine positive Lösung x_0 der Gleichung (1) die Zahl $[x_0]$, d.i. diejenige ganze Zahl $g = [x_0]$, für die $g \leq x_0 < g + 1$ gilt!

c) Gibt es auch eine reelle Zahl a mit $a > 0$ und $a \neq 1$ derart, daß für jede reelle Zahl $b \neq 0$ die Gleichung (1) unendlich viele positive reelle Lösungen x hat?

Hinweise:

1. Als Näherungswert für π kann auf 4 Dezimalstellen genau $\pi = 3,1416$ verwendet werden.

2. Bei der Herleitung von Aussagen über Lösungen der Gleichung (1) sind auch grafisch-anschaulich begründete Beweismittel zugelassen.

Aufgabe 221043B:

Fünf Kugeln K_1, ... , K_5 mit gleichem Radius r seien so angeordnet, daß jede Kugel genau zwei andere berührt und daß ihre Mittelpunkte M_1, ..., M_5 ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden. Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berühre jede der fünf Kugeln K_1, ..., K_5.

Untersuchen Sie, ob K_6 die Ebene durch M_1, ..., M_5 schneidet, berührt oder nicht erreicht!

Aufgabe 221044:

Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist und wenn D der Mittelpunkt von AB, D' der Fußpunkt des Lotes von D auf BC und H der Mittelpunkt von DD' ist, dann stehen AD' und CH aufeinander senkrecht.

Aufgabe 221045:

Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

Aufgabe 221046:

Beweisen Sie, daß sich in einem würfelförmigen Hohlkörper von der Kantenlänge a zwei regelmäßige Tetraeder der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu durchdringen unterbringen lassen!