



22. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1982/1983

Aufgaben





22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 221211:

Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3} \quad (1)$$

$$y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad (2)$$

Aufgabe 221212:

Man beweise:

Sind a, b die Seitenlängen eines Parallelogramms und e, f die Längen seiner Diagonalen, so gilt $a^2 - b^2 < ef$.

Aufgabe 221213:

In einem alten Rechenbuch wird das folgende Verfahren für die Multiplikation der Zahl 142 857 mit einer natürlichen Zahl n , die größer als 7 ist, angegeben:

	Beispiel für $n = 326$
Man dividiere zunächst n durch 7 und schreibe als erste Zahl den ganzzahligen Teil des Ergebnisses auf.	$(326 : 7 = 46, \text{ Rest } 4)$ 46
Dann multipliziere man 142 857 mit dem Rest und schreibe das Produkt hinter die zuerst aufgeschriebene Zahl.	$(142\,857 \cdot 4 = 571\,428)$ 46 571 428
Von der so gebildeten Zahl subtrahiere man die zuerst aufgeschriebene Zahl.	-46
Das Ergebnis ist das gesuchte Produkt.	46 571 382 = 142 857 · 326

Es zeigt sich jedoch, daß dieses Verfahren nicht für alle natürlichen Zahlen $n > 7$ zum richtigen Ergebnis führt.

- Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen n mit $n > 7$, für die das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt!
- Nennen und begründen Sie für die anderen $n > 7$ ein zum richtigen Ergebnis führendes Verfahren, das ebenfalls das Multiplizieren von 142 857 mit einer Zahl größer als 7 vermeidet und die Division von n durch 7 zum Ausgangspunkt hat!



Aufgabe 221214:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , die die Eigenschaft haben, daß von den folgenden Aussagen (A), bis (F) vier wahr und zwei falsch sind!

- (A) x ist eine positive rationale Zahl.
- (B) x ist eine natürliche Zahl, oder x ist mit einer ganzen Zahl $g \neq 0$ in der Form $x = \frac{1}{g}$ darstellbar.
- (C) x^2 ist eine ganze Zahl, x ist aber selbst nicht ganzzahlig.
- (D) Es gilt $7 < x^2 < 9$.
- (E) x ist eine positive reelle Zahl, aber keine natürliche Zahl.
- (F) Wenn x rational ist, so ist x ganzzahlig.

Hinweis: Eine Aussage der Form "Wenn p , so q " ist genau dann wahr, wenn die Aussage "(nicht p) oder q " wahr ist. Eine Aussage der Form " u oder v " ist genau dann wahr, wenn von den beiden Teilaussagen u und v mindestens eine wahr ist.