22. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1982/1983

Aufgaben

22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 221221:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= 5 \\ y \cdot (x+z) &= 8 \\ z \cdot (x+y) &= 9 \quad \text{erfüllen!} \end{aligned}$$

Aufgabe 221222:
Man untersuche, ob es unter allen Dreiecken, bei denen für die Seitenlängen a, b, c die Beziehungen

$$a \leq 1\text{ cm} \leq b \leq 2\text{ cm} \leq c \leq 3\text{ cm}$$

gelten, ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt gibt. Ist das der Fall, so ermittle man diesen Flächeninhalt.

Aufgabe 221223:
Man beweise:

Sind a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler und v ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so gilt

$$a + b \leq d + v. \tag{1}$$

Man untersuche, für welches a, b in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 221224:
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Auf einer Kreislinie seien $2n$ paarweise verschiedene Punkte P_1, P_2, ..., P_{2n} gegeben. Gesucht wird die Anzahl A_n aller verschiedenen Möglichkeiten, eine Menge von n Sehnen so zu zeichnen, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

Jede Sehne verbindet einen der Punkte P_1, P_2, ..., P_{2n} mit einem anderen dieser Punkte, und keine zwei dieser Sehnen haben im Innern oder auf dem Rand des Kreises einen gemeinsamen Punkt.

Zwei Möglichkeiten gelten genau dann als verschieden, wenn es mindestens ein Punktepaar P_i, P_j gibt, das bei der einen der beiden Möglichkeiten durch eine Sehne verbunden ist, bei der anderen Möglichkeit dagegen nicht.

a) Ermitteln Sie die Anzahl A_3, indem Sie zu sechs Punkten P_1, P_2, ..., P_6 mehrere verschiedene Möglichkeiten für drei Sehnen angeben und nachweisen, daß damit alle verschiedenen Möglichkeiten der geforderten Art erfaßt sind!

b) Ermitteln Sie eine Formel, mit der man für beliebiges $n \geq 2$ die Anzahl A_n aus den Anzahlen A_1, ..., A_{n-1} berechnen kann!

c) Ermitteln Sie die Anzahl A_5!