22. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1982/1983

Aufgaben

22. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 221231:
Es sind alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 11x_2 + 21x_3 + 31x_4 + 41x_5 &= 55,\\ 2x_1 + 12x_2 + 22x_3 + 32x_4 + 42x_5 &= 60,\\ 3x_1 + 13x_2 + 23x_3 + 33x_4 + 43x_5 &= 65,\\ 4x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 34x_4 + 44x_5 &= 70,\\ 5x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 35x_4 + 45x_5 &= 75 \end{aligned}$$

zu ermitteln.

Aufgabe 221232:
Man ermittle für alle diejenigen 30-Tupel $(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{30})$ von (nicht notwendig verschiedenen) positiven ganzen Zahlen a_i $(i = 1, ..., 30)$, die

$$\sum_{i=1}^{30} a_i = 1\,983$$

erfüllen, den größten Wert, den der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen a_i annehmen kann.

Aufgabe 221233A:

a) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl p mit der folgenden Eigenschaft gibt: In jedem konvexen Viereck gilt für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F des Vierecks $F \leq p \cdot (a^2+b^2+c^2+d^2)$.

b) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl q mit der folgenden Eigenschaft gibt: In jedem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F des Dreiecks $F \leq q \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$.

Wenn es in a) bzw. b) eine solche kleinste Zahl p bzw. q gibt, so ermittle man jeweils diese Zahl.

Aufgabe 221233B:
Man beweise:

a) Wenn es zu einem Tetraeder $ABCD$ eine Kugel K gibt, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, dann gilt:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC} \qquad (1)$$

b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, dann gibt es eine Kugel K, die alle sechs Kanten des Tetraeder berührt.

Definition: Eine Kugel K berührt genau dann eine Strecke s, wenn K die s enthaltende Gerade berührt und der Berührungspunkt auf s liegt.

Aufgabe 221234:

Ist c eine positive reelle Zahl, so bezeichnet f die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \sin \frac{c}{x}$ definierte Funktion.

Gegeben sei nun eine beliebige natürliche Zahl $m > 1$.

a) Man ermittle (in Abhängigkeit von m) alle diejenigen positiven reellen Zahlen c, für die die Funktion f im Intervall $10 \leq x \leq 20$ genau m Nullstellen hat, unter denen sich auch die Zahlen 10 und 20 selbst befinden.

b) Für jede in a) gefundene Zahl c beweise man, daß f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen hat. Ferner ermittle man (in Abhängigkeit von m und für jede zu dem betreffenden m gefundene Zahl c) die größte Nullstelle von f.

Aufgabe 221235:

a) Man beweise: Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ sind, dann gilt für alle reellen x, y, die nicht beide 0 sind, $ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$.

b) Man beweise: Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 < 0$ sind, dann gibt es in der x, y-Ebene im Innern jedes Kreises um den Koordinatenursprung $(0; 0)$ zwei Punkte P_1 und P_2 mit folgenden Eigenschaften:

Für die Koordinaten $(x_1; y_1)$ von P_1 gilt die Ungleichung $ax_1^2 + 2b\,x_1\,y_1 + cy_1^2 > 0$;
für die Koordinaten $(x_2; y_2)$ von P_2 gilt die Ungleichung $ax_2^2 + 2b\,x_2\,y_2 + cy_2^2 < 0$.

Aufgabe 221236:

Eine Tür soll mit einer genügend großen Anzahl von Schlössern versehen werden. Zu jedem Schloß soll eine Sorte passender Schlüssel in genügend großer Anzahl vorhanden sein, wobei jeder Schlüssel zu genau einem Schloß passen soll. Elf Personen sollen derartige Schlüssel erhalten, aber nicht jede Person für jedes Schloß. Ein Vorschlag lautet vielmehr, es solle folgendes erreicht werden:

Immer wenn mindestens sechs der elf Personen anwesend sind, befindet sich unter ihren Schlüsseln für jedes Schloß auch ein passender Schlüssel; immer wenn weniger als sechs Personen anwesend sind, haben sie für mindestens ein Schloß keinen passenden Schlüssel.

Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Schlössern sowie eine Schlüsselverteilung (an die elf Personen), mit der dieser Vorschlag realisierbar wäre!