23. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1983/1984

Aufgaben

23. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 231011:

Anne setzt in den beiden Termen $a^2 - b^2$ und $a - b$ je eine natürliche Zahl für a und b ein. Sie berechnet die dabei entstehenden Zahlen. Entsteht aus $a^2 - b^2$ beim Einsetzen die Zahl z und aus $a - b$ die Zahl n, so stellt Anne fest, daß sich aus z und n dann $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl ergibt.

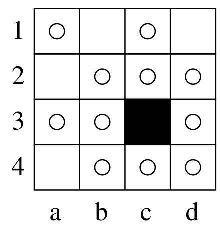
Gilt das immer?

Aufgabe 231012:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $x^3 - 9x > 0$ gilt!

Aufgabe 231013:

Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, daß sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und senkrechten Reihe und die Felder in Richtung der beiden Diagonalen erreichen kann.

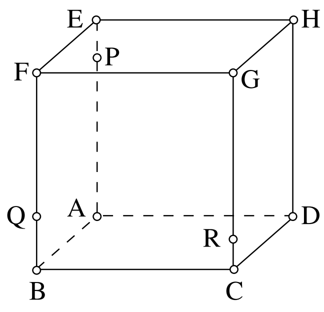


In der Abbildung ist die Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, und die von ihr erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Die Buchstaben und Zahlen am Rand dienen zur eindeutigen Benennung der Felder. So steht z.B. die Dame in der Abbildung auf c3.

Auf einem Quadrat aus 4 mal 4 Feldern sollen nun vier Damen so aufgestellt werden, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

Aufgabe 231014:



Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) mit der Kantenlänge 5 cm habe bei schräger Parallelprojektion mit $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$ (auch als Kavalierperspektive bezeichnet) das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Auf den Kanten AE, BF und CG mögen Punkte P, Q und R so liegen, daß $\overline{AP} : \overline{PE} = 4 : 1$, $\overline{BQ} : \overline{QF} = 2 : 3$ und $\overline{CR} : \overline{RG} = 1 : 4$ gilt. Der Punkt S sei der Punkt, in dem die Ebene, die durch P, Q und R geht, die Kante DH oder deren Verlängerung schneidet.

Konstruieren Sie das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ des Würfels, konstruieren Sie darin die Bildpunkte P', Q', R' der Punkte P, Q, R und dann das Bild S' des Punktes S! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion von S' und beweisen Sie, daß der Punkt S bei der Parallelkonstruktion den nach Ihrer Beschreibung konstruierten Punkt S' als Bild hat!