23. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1983/1984

Aufgaben

23. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 231031:

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(g; r)$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, für die

$$\frac{r}{r^2 - 6r + 10} = g \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 231032:

Von einem Dreieck ABC und einem Punkt D auf der Seite AC wird vorausgesetzt, daß

$$\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle CBD} = 45° \quad \text{und} \quad \overline{\sphericalangle ABD} = \tfrac{1}{3}\overline{\sphericalangle BAC} \quad \text{gilt.}$$

Beweisen Sie, daß dann $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ gilt!

Aufgabe 231033:

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn man die Menge aller natürlichen Zahlen so in zwei Mengen A und B einteilt, daß jede natürliche Zahl in genau einer dieser beiden Mengen enthalten ist, dann gibt es eine natürliche Zahl d so, daß in einer der beiden Mengen A, B drei Zahlen der Form a, $a + d$, $a + 2d$ enthalten sind (man könnte auch sagen, daß (mindestens) eine der beiden Mengen A, B eine arithmetische Folge der Länge 3 enthält).

Aufgabe 231034:

Jürgen überlegt: Im Jahre 1983 begann die 23. OJM. Für mich persönlich wird es der 5. Start sein.

Unter Verwendung dieser Zahlen bildet Jürgen die Gleichung

$$1\,983 + 23 \cdot x^2 = 5 \cdot y^2. \tag{1}$$

Gibt es ganze Zahlen x und y, für die diese Gleichung (1) gilt?

Aufgabe 231035:

Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke CD, einen inneren Punkt Q der Strecke BC sowie noch einen inneren Punkt R der Strecke CD zeichnen.

Ulrike stellt sich die Aufgabe, zu erreichen, daß für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABP und den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks AQR die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt; Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.

Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare oder eine unlösbare Aufgabe gestellt hat!

Aufgabe 231036:

Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'S'$ einer Pyramide $ABCDS$ in schräger Parallelprojektion sowie das Bild P' eines auf der Kante CS liegenden Punktes P, das Bild Q' eines auf der Kante DS liegenden Punktes Q und das Bild R' eines auf der Fläche ABS liegenden Punktes R.

Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur, die beim Schnitt der Pyramide $ABCDS$ mit der Ebene durch P, Q, R entsteht! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Eine Begründung und Diskussion wird nicht gefordert.