23. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1983/1984

Aufgaben

23. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 231041:

Stellen Sie fest, ob es Quadratzahlen z gibt, die sich in der Form

$$z = n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3$$

mit einer natürlichen Zahl n darstellen lassen!

Aufgabe 231042:

"Konstruieren Sie ein Dreieck aus $b - c = 10\,\mathrm{cm}$, $\beta - \gamma = 80°$ und der Differenz $u - v = 4\,\mathrm{cm}$ der Winkelhalbierenden-Abschnitte u, v von a!"

Mit dieser Kurzfassung ist folgende Aufgabe gestellt:

Gegeben seien die Längen $d = 10\,\mathrm{cm}$, $e = 4\,\mathrm{cm}$ und die Winkelgröße $\delta = 80°$. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften: Wenn die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$ die Seite BC in D schneidet, und wenn b, c, u, v die Längen der Strecken AC, AB, CD, BD sowie β, γ die Größen der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ sind, so gilt:

$$b - c = d, \quad u - v = e, \quad \beta - \gamma = \delta.$$

Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Stellen Sie fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 231043A:

Von einem Tetraeder $ABCD$ wird $\overline{BC} = \overline{AD}$, $\overline{CA} = \overline{BD}$ und $\overline{AB} = \overline{CD}$ vorausgesetzt. Die Mittelpunkte der Strecken BC, CA, AB, AD, BD, CD seien in dieser Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen ein gemeinsamer Punkt P der drei Strecken M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 existiert und daß dieser Punkt P der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$ (d.h. der durch die vier Punkte A, B, C, D gehenden Kugel) ist!

Aufgabe 231043B:

a) Geben Sie eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion f an, die für alle reellen Zahlen x die Eigenschaft

$$f(x+1) = f(x) + (-1)^{[f(x)]} \qquad (1)$$

hat! Dabei bezeichnet, wenn z eine reelle Zahl ist, $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$, für die $g \leq z < g+1$ gilt.

Beweisen Sie, daß die von Ihnen angegebene Funktion f die Eigenschaft (1) hat! Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f im Intervall aller x, für die $-3 \leq x \leq 3$ ist!

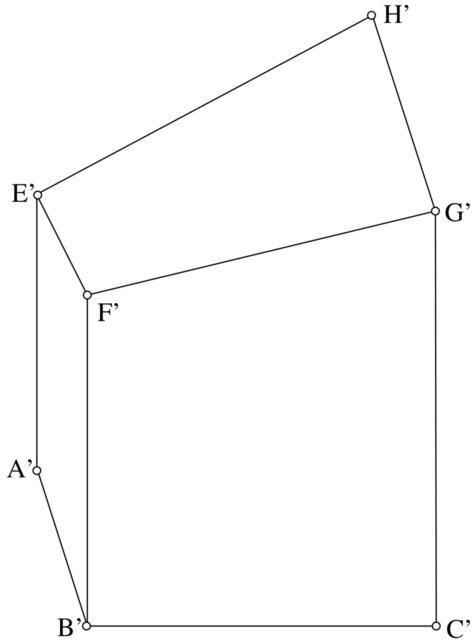
b) Beweisen Sie, daß jede Funktion f mit der Eigenschaft (1) periodisch mit der Periode 2 sein muß, d.h., daß sie für jedes reelle x die Gleichung $f(x+2) = f(x)$ erfüllt!

Aufgabe 231044:

Auf dem Arbeitsblatt sind von einem Körper K die bei schräger Parallelprojektion entstandenen Bilder der sichtbaren Ecken und Kanten abgebildet. Ferner wird vorausgesetzt, daß der Körper K insgesamt von sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ und $EFGH$ begrenzt wird und daß die vier Kanten AE, BF, CG und DH sämtlich zueinander parallel sind.

Konstruieren Sie das Bild D' der nicht sichtbaren Ecke D bei der genannten Parallelprojektion! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt D' das Bild der genannten Ecke D ist!

Arbeitsblatt:



Aufgabe 231045:

Ermitteln Sie alle diejenigen Winkelgrößen x, für die

$$0° \leq x \leq 180° \quad \text{und} \tag{1}$$

$$\left(2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x\right) \cdot \sin x = 1 \quad \text{gilt!} \tag{2}$$

Aufgabe 231046:

Von einem Achteck $ABCDEFGH$ werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:

(1) Die Maßzahlen der Längen jeder der Achtecksseiten sind rationale Zahlen.

(2) Die Innenwinkel des Achtecks haben abwechselnd die Größen 150° und 120°.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen folgt: In dem Achteck $ABCDEFGH$ gilt

$$\overline{AB} = \overline{EF}, \quad \overline{BC} = \overline{FG}, \quad \overline{CD} = \overline{GH} \quad \text{und} \quad \overline{DE} = \overline{HA}.$$