24. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1984/1985

Aufgaben

24. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240931:

Beweisen Sie, daß es keine vierstellige Quadratzahl z mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!

(1) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.

(2) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

Aufgabe 240932:

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.

Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

Aufgabe 240933:

Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Der Mittelpunkt der Kante AB sei M, der Mittelpunkt der Kante CD sei N.

a) Beweisen Sie, daß die Gerade durch M und N sowohl auf der Geraden g durch A und B als auch auf der Geraden h durch C und D senkrecht steht!

b) Ermitteln Sie den Abstand $\overline{MN}$ zwischen M und N!

c) Beweisen Sie, daß für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand $\overline{XY}$ zwischen X und Y die Ungleichung $\overline{XY} \geq \overline{MN}$ erfüllt!

Aufgabe 240934:

Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren.

Anke meint: "Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen $n^2 > 1$, die jeweils als Summe von n natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden."

Bernd fragt: "Gibt es auch Quadratzahlen $n^2 > 1$, die sich als Summe von $2n$ natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?"

a) Beweise Ankes Aussage!

b) Beantworte Bernds Frage!

Aufgabe 240935:

Beweisen Sie, daß für die Kathetenlängen a, b und die Hypotenusenlänge c jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung $a^5 + b^5 < c^5$ gilt!

Aufgabe 240936:

Es sei AB eine Strecke und P ein Punkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus. Von P werden an alle diejenigen Kreise, die AB als Sehne haben, die Tangenten gelegt.

Beweisen Sie, daß es dann einen Kreis um P gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!