24. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1984/1985

Aufgaben

24. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 241011:

Zwei natürliche Zahlen, die zwischen 10 und 20 liegen, lassen sich *im Kopf* nach folgendem Verfahren relativ schnell und sicher multiplizieren:

Man addiere zur ersten Zahl die Einerziffer der zweiten Zahl, hänge an die erhaltene Summe eine Ziffer 0 an und addiere zu der nun erhaltenen Zahl das Produkt der Einerziffern der beiden gegebenen Zahlen.

Um beispielsweise nach dieser Regel $16 \cdot 12$ zu berechnen, addiert man 2 zu 16, erhält 18, hängt eine 0 an und addiert zu der nun erhaltenen Zahl 180 das Produkt $6 \cdot 2$, also 12. Es ergibt sich 192, in der Tat die gesuchte Zahl $16 \cdot 12$.

Beweisen Sie, daß dieses Verfahren für alle natürlichen Zahlen zwischen 10 und 20 zum richtigen Ergebnis führt!

Aufgabe 241012:

In einem Dreieck ABC mit spitzen Innenwinkeln bei A und B sei das Lot von C auf AB gefällt. Sein Fußpunkt sei D. Für ihn gelte.

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}.$$

Ermitteln Sie aus dieser Voraussetzung die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$!

Aufgabe 241013:

Ermitteln Sie alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z, für die die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$x \cdot (y + z) = 0. \qquad (1)$$

$$y \cdot (x + z) = 0. \qquad (2)$$

Aufgabe 241014:

Gegeben seien ein beliebiges Rechteck $ABCD$ und zwei auf der Seite AD liegende beliebige Punkte X und Y mit $X \neq A$, $Y \neq A$ und $X \neq Y$.

Konstruieren Sie alle diejenigen Kreise k, die die durch A und B gehende Gerade g berühren und durch die Punkte X und Y gehen! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie, daß jeder Kreis k mit den geforderten Eigenschaften nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann und daß jeder nach dieser Beschreibung konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat!

Wie viele solcher Kreise k gibt es (jeweils zu gegebenen $ABCD$, X und Y)?