



**24. Mathematik Olympiade**  
**3. Stufe (Bezirksolympiade)**  
**Klasse 10**  
**Saison 1984/1985**

Aufgaben





24. Mathematik-Olympiade  
3. Stufe (Bezirksolympiade)  
Klasse 10  
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 241031:

In einer Diskussion über die Anzahl von Kurvenschnittpunkten behauptet Anne, ausgehend vom Beispiel der Kurven mit den Gleichungen  $y = \cos x$  und  $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ : "Die Kurve  $c$  mit der Gleichung  $y = \cos x$  hat mit jeder quadratischen Parabel genau zwei Schnittpunkte."

Bernd behauptet dagegen: "Es gibt auch eine quadratische Parabel, die mit der Kurve  $c$  genau 10 Schnittpunkte hat."

Untersuchen Sie sowohl für Annes als auch für Bernds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 241032:

Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen  $x$ , die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen (1) gelten!

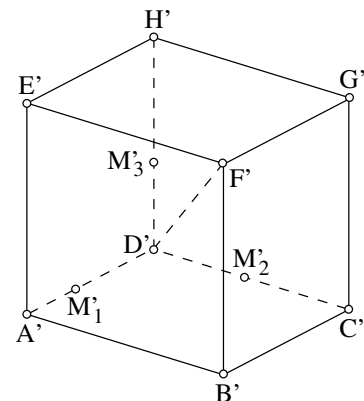
$$2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \tag{1}$$

Aufgabe 241033:

Die Abbildung und das Arbeitsblatt zeigen das Bild  $A'B'C'D'E'F'G'H'$  eines Würfels  $ABCDEFGH$  in schräger Parallelprojektion sowie die Bilder  $M'_1, M'_2, M'_3$  der Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  der Würfelkanten  $DA, DC$  bzw.  $DH$ .

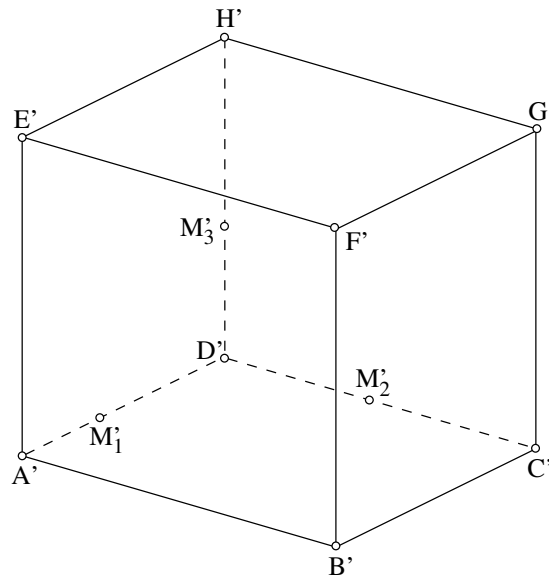
Ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche  $M_1M_2M_3$  sei, habe als Seitenkanten die Strecken  $M_1N_1, M_2N_2$  und  $M_3N_3$ , die parallel zu  $DF$  verlaufen. Die Deckfläche  $N_1N_2N_3$  des Prismas liege so weit außerhalb des Würfels, daß das Prisma in seinem Innern den Punkt  $F$  enthält.

Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Bilder der Schnittlinien, die die Oberfläche des Prismas mit der Oberfläche des Würfels hat! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, daß eine nach Ihrer Beschreibung durchgeführte Konstruktion die Bilder aller genannten Schnittlinien ergibt!





Arbeitsblatt:



Aufgabe 241034:

Jemand sucht natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Er findet z.B., daß sowohl jede der Zahlen 89 und 90 als auch ihr Produkt 8010 diese Eigenschaft hat.

- Bestätigen Sie, daß sich jede der Zahlen 89, 90 und 8010 als Summe von jeweils zwei Quadratzahlen darstellen läßt!
- Beweisen Sie den folgenden allgemeinen Satz!

Wenn  $s$  und  $t$  jeweils eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist, sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen zu lassen, dann hat auch stets die Zahl  $s \cdot t$  diese Eigenschaft.

Aufgabe 241035:

- Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck  $ABC$ , verlängern Sie  $AC$  über  $C$  hinaus bis zu demjenigen Punkt  $C'$ , für den  $\overline{AC'} = 3 \cdot \overline{AC}$  ist, und konstruieren Sie auf  $BC'$  denjenigen Punkt  $Y$ , für den  $\overline{BY} = 2 \cdot \overline{C'Y}$  gilt! Der Schnittpunkt von  $AY$  mit  $BC$  sei  $X$ .
- Beweisen Sie, daß die in a) verlangte Konstruktion für jedes Dreieck  $ABC$  auf denselben Wert des Verhältnisses  $\overline{BX} : \overline{CX}$  führt! Ermitteln Sie diesen Wert!

Aufgabe 241036:

Man ermittle für jede Funktion  $f$ , die die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, die Funktionswerte  $f(0)$ ,  $f(-1)$  und  $f(\frac{3}{7})$ .

- Die Funktion  $f$  ist für alle reellen Zahlen definiert.
- Es gilt  $f(1) = 2$ .
- Für alle reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt  $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ .