24. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1984/1985

Aufgaben

24. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 241041:

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1\,985}$ gilt!

Aufgabe 241042:

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Auf den Seiten BC, CA, AB seien D, E bzw. F diejenigen Punkte, für die $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}$, $\overline{CE} = 2 \cdot \overline{AE}$, $\overline{AF} = 2 \cdot \overline{BF}$ gilt. Weiter sei jeweils U bzw. V bzw. W der Schnittpunkt von AD mit BE bzw. von BE mit CF bzw. von CF mit AD.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks UVW stets gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist!

Aufgabe 241043A:

a) Man beweise, daß für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) existiert:

   (1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.

   (2) Für alle reellen Zahlen x mit $2 \leq x < 4$ gilt $f(x) = p$.

   (3) Für alle reellen Zahlen x gilt $f(x+2) = \frac{f(x)}{5 \cdot f(x) - 1}$.

b) Man ermittle für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ und jede Funktion f, die die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, den Funktionswert $f(1\,985)$ in Abhängigkeit von p.

Aufgabe 241043B:

Es sei P die Oberfläche einer beliebigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

Man beweise: Wenn der Durchschnitt von P mit einer Ebene E ein (nicht entartetes) Parallelogramm ist, dann ist er ein Quadrat.

Hinweis: Ein Parallelogramm heißt genau dann *nicht entartet*, wenn keine drei seiner Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Aufgabe 241044:

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen, für die $a! + b! = (a+b)!$ gilt!

Hinweis: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist $n!$ definiert als das Produkt aus allen denjenigen natürlichen Zahlen k, für die $1 \leq k \leq n$ gilt; ferner ist $0! = 1$ definiert.

Aufgabe 241045:

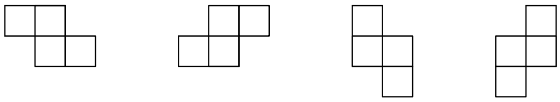
Es sei

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{999\,998}} + \frac{1}{\sqrt{999\,999}} + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

Weisen Sie nach, daß dann $1\,998 < T < 1\,999$ gilt!

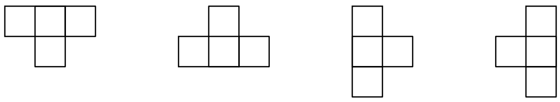
Aufgabe 241046:

a) Es ist zu entscheiden, ob es möglich ist, die Felder des 8×8 Schachbrettes derart mit den Zahlen 1, 2, ... , 64 zu numerieren, daß für jede Teilfigur des Schachbrettes, die von der folgenden Form ist,



die Summe der vier Zahlen in den Teilfiguren durch vier teilbar ist.

b) Dieselbe Aufgabe ist für



zu lösen.