25. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1985/1986

Aufgaben

25. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 251011:

a) Beweisen Sie unter Verwendung des Tafelwerkes, daß $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$ gilt!

b) Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung ohne Verwendung von Näherungswerten für die Wurzeln!

Aufgabe 251012:

Drei Mathematiklehrer, die am selben Tag Geburtstag hatten und von denen jeder zu diesem Zeitpunkt jünger als 50 Jahre, aber älter als 20 Jahre war, trafen sich beim gemeinsamen Geburtstagsfest.

Jeder von ihnen hatte zwei Kinder; erstaunlicherweise hatten auch alle diese sechs Kinder am selben Tag Geburtstag.

Während eines Gespräches sagte der ältere von ihnen: "Ich bin heute $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie mein Sohn und 11mal so alt wie meine Tochter geworden. Wenn meine Tochter so alt sein wird, wie mein Sohn jetzt ist, dann werde ich 6mal so alt sein wie sie und 4mal so alt wie mein Sohn."

Nach kurzem Überlegen stellte der zweite Mathematiklehrer fest, daß diese Angaben auch für ihn und sein älteres und jüngstes Kind zutreffen. Jetzt rechnete auch der jüngste von ihnen nach und sagte: "Es ist doch merkwürdig, die gleichen Aussagen gelten auch für mich und meine beiden Kinder, obgleich wir drei Lehrer doch verschieden alt sind."

Stellen Sie fest, ob es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle diese Aussagen zutreffen und ob durch die Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind! Wenn das zutrifft, geben Sie das Alter der drei Lehrer und ihrer Kinder an!

Aufgabe 251013:

Der Querschnitt einen Kanals habe die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Seine parallelen Seiten seien waagerecht, die längere oben, die kürzere unten (*Sohle* des Grabens). Die schrägen Seitenwände seien gegen die lotrechte Richtung um 30° geneigt.

Wegen der geforderten Durchflußmenge soll der Querschnitt einen vorgegebenen Flächeninhalt F besitzen. Außerdem ist die Länge a der kürzeren der parallelen Seiten des Querschnitte (Sohle des Grabens) vorgegeben.

Ermitteln Sie die Tiefe t des Kanals in Abhängigkeit von a und F!

Diese Aufgabe wurde zunächst unter Verwendung trigonometrischer Verfahren bearbeitet. Am nächsten Tage trug Jörg eine Lösung ohne Verwendung der Trigonometrie vor.

Man gebe eine derartige Lösung an.

Aufgabe 251014:
Stellen Sie die Zahl 1985

a) im 2adischen Positionasystem (*Dualsystem*)

b) im 3adischen Positionssystem dar!

c) Woran erkennt man bei den Darstellungen in diesen Positionssystemen, daß die Zahl ungerade ist?

Anmerkung : Unter der Darstellung einer Zahl im m-adischen Positionssystem versteht man diejenige, die die Basis m und die Ziffern 0, 1, ..., $m-1$ benutzt.