25. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1985/1986

Aufgaben

25. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 251031:

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ von ganzen Zahlen a und b, die die Gleichung

$$a + b = (a - b)^2 \quad \text{erfüllen!}$$

Aufgabe 251032:

a) Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl, und es sei f die im Intervall

$$0 \le x \le a \qquad (1)$$

$$\text{durch} \quad f(x) = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} \qquad (2)$$

definierte Funktion.

Beweisen Sie, daß f im Intervall (1) streng monoton fallend ist!

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D, in dem durch (2) eine Funktion f definiert wird! Untersuchen Sie, ob f im gesamten Bereich D streng monoton fallend ist!

Hinweis : Eine Funktion f heißt genau dann in einem Bereich B streng monoton fallend, wenn für alle reellen Zahlen x_1, x_2 in B gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

Aufgabe 251033:

Aus 27 Würfeln mit der Kantenlänge a wird ein Würfel mit der Kantenlänge $3a$ zusammengesetzt. Jeder der 27 kleinen Würfel ist entweder völlig weiß oder völlig schwarz angestrichen. Beim Zusammensetzen soll auf jeder der sechs quadratischen Seitenflächen des großen Würfels ein Muster entstehen, das in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein schwarzes und genau zwei weiße Quadrate enthält. Ermitteln Sie

a) die kleinste,

b) die größte

Anzahl schwarzer Würfel, mit der diese Forderungen erfüllbar sind!

Aufgabe 251034:

Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, daß sie die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllt:

(1) Die Zahl x hat, im Zweiersystem (System mit der Basis 2) geschrieben, genau zehn Stellen.

(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 1.

(3) Schreibt man x im Vierersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 0.

(4) Die Zahl x hat, im Fünfersystem geschrieben, genau vier Stellen.

(5) Schreibt man x im Zehnersystem, so steht an der letzten Stelle die Ziffer 2.

Beweisen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und ermitteln Sie diese Zahl!

Aufgabe 251035:

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Darin sei F ein von B und C verschiedener Punkt der Strecke BC, und E sei ein von A und C verschiedener Punkt der Strecke AC. Ferner sei P der Schnittpunkt der Strecken AF und BE.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen die Umkreise der drei Dreiecke AFC, EBC und PFB stets genau einen Punkt gemeinsam haben!

Aufgabe 251036:

Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Quaders $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion.

a) Konstruieren Sie das Bild S' des Schnittpunktes S der Strecken EC mit der Ebene, die durch A, F und H geht! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt S' das Bild des genannten Punktes S ist!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Quader $ABCDEFGH$, für die S mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH zusammenfällt!

Arbeitsblatt :