25. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1985/1986

Aufgaben

25. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 251041:

Beweisen Sie, daß

$$\frac{1\,281^3 + 1\,282^3 + 1\,283^3 + 1\,284^3 + 1\,285^3 + 1\,286^3 + 1\,287^3}{639 \cdot 640 + 641 \cdot 642 + 642 \cdot 643 + 644 \cdot 645}$$

eine durch 7 teilbare natürliche Zahl ist!

Aufgabe 251042:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat; sein Flächeninhalt sei $F(ABCD)$; sein Umkreis sei k.

Beschreiben Sie eine Konstruktion für ein (nicht notwendig regelmäßiges) konvexes Sechseck $PQRSTU$, dessen sämtliche Eckpunkte auf k liegen und dessen Flächeninhalt gleich $F(ABCD)$ ist!

Beweisen Sie, daß jedes Sechseck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, diese Forderungen erfüllt!

Aufgabe 251043A:

Kurt möchte auf einer Holzkugel K vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruieren, die die Bedingungen

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_4} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_2P_4} = \overline{P_3P_4} =$$

erfüllen. Folgende Hilfsmittel stehen ihm zur Verfügung:

- Ein ebenes Zeichenblatt B, auf dem eine Strecke DE gegeben ist, deren Länge gleich dem Durchmesser d der Kugel K ist,
- ein Zirkel, mit dem man sowohl auf B als auch auf der Oberfläche der Kugel K Kreise zeichnen kann (der Zirkel besitzt zu diesem Zweck einknickbare, genügend lange Schenkel),
- ein Lineal (wie üblich nur zum Konstruieren gerader Linien auf B zu verwenden, nicht zur Skalenbenutzung).

Beschreiben Sie eine Konstruktion, die sich mit diesen Hilfsmitteln ausführen läßt! Beweisen Sie, daß durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion vier Punkte der geforderten Art erhalten werden!

Hinweis : Unter $\overline{P_iP_j}$ ist die Länge der im Raum geradlinig (nicht auf der Kugeloberfläche) verlaufenden Verbindungsstrecke der Punkte P_i, P_j zu verstehen. Ebenso wird beim Konstruieren eines Kreises auf K die Zirkelspanne als geradlinige Streckenlänge festgelegt.

Aufgabe 251043B:
Gegeben seien reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4.

Man ermittle zu jedem möglichen Fall für diese a_1, ..., a_4 jeweils alle diejenigen Tripel (b_1, b_2, b_3) reeller Zahlen (bzw. beweise gegebenenfalls, daß es keine solchen Tripel gibt), für die das Gleichungssystem

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + x_3^2 = b_1, \quad (1)$$
$$x_2^2 + a_3x_3^2 = b_2, \quad (2)$$
$$x_2^2 + a_4x_3^2 = b_3 \quad (3)$$

genau ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen als Lösung hat.

Aufgabe 251044:
Ermitteln Sie alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r, für die die Gleichung

$$\frac{2x}{r \cdot (x+r)} + \frac{1}{x-2r} = \frac{4x-r+6}{r \cdot (x-2r) \cdot (x+r)}$$

a) genau zwei verschiedene reelle Lösungen,

b) genau eine reelle Lösung,

c) keine reelle Lösung

besitzt!

Aufgabe 251045:
Stellen Sie fest, ob es möglich ist, einen Würfel mittels einer Ebene so zu schneiden, daß als Schnittfigur

a) ein regelmäßiges Dreieck,

b) ein regelmäßiges Viereck,

c) ein regelmäßiges Fünfeck

entsteht!

Aufgabe 251046:
Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, ...)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:

(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$; sie bilden also die Teilfolge $(1, 9, 8, 6)$.

(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.

Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und $(1, 9, 8, 6)$ lautet.