25. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1985/1986

Aufgaben

25. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 251231:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen m und n, für die die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:

(1) $m + n$ und $m \cdot n$ sind zweistellige Zahlen.

(2) Vertauscht man die Ziffern der Zahl $m + n$ miteinander, so erhält man die (Zifferndarstellung der) Zahl $m \cdot n$.

Aufgabe 251232:

Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 3$ seien n Kreise K_1, ..., K_n, so in einer Ebene gelegen, daß sie folgende Bedingungen erfüllen (wobei der Kreis K_1 auch mit K_{n+1} bezeichnet sei):

Es gibt einen Punkt O, der auf allen Kreisen K_1, ..., K_n liegt. Für $i = 1, ..., n$ gilt: K_i und K_{i+1} haben noch genau einen von O verschiedenen Punkt A_i gemeinsam. Die Punkte A_1, ..., A_n sind paarweise verschieden; die Strahlen von O aus durch A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, A_1 sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.

Ferner seien P_1, ..., P_{n+1} Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen: Für $i = 1, ..., n$ gilt: P_i liegt auf Kreis K_i und ist von O und A_i verschieden: P_{i+1} ist der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_{i+1} mit der Geraden durch P_i und A_i. Die Strahlen von O aus durch A_n, P_1, A_1, P_2, A_2, ..., P_n, A_n sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.

a) Beweisen Sie, daß für $n = 3$ aus diesen Voraussetzungen stets $P_4 = P_1$ folgt!

b) Untersuchen Sie, ob für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ aus den genannten Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$ folgt!

Aufgabe 251233A:

Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele 5-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ von positiven ganzen Zahlen gibt, für die die folgende Gleichung (1) erfüllt ist:

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = x_5^{13} \qquad (1)$$

Aufgabe 251233B:

Beweisen Sie, daß es unter allen Zerlegungen $100 = z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$ der Zahl 100 in reelle Faktoren $z_i \geq 2$ $(i = 1, 2, ..., n;\ n$ positiv ganzzahlig) eine Zerlegung gibt, für die die Summe $s = z_1 + z_2 + ... + z_n$ einen kleinstmöglichen Wert hat! Ermitteln Sie eine solche Zerlegung!

Aufgabe 251234:

Acht Gegenstände, die mit A_1, A_2, ..., A_8 bezeichnet seien, sind in zwei Schränke S_1 und S_2 verschlossen worden. Zur Ermittlung der Verteilung der Gegenstände werden folgende Aussagen gemacht:

In dem Schrank S_1 befinden sich

(1) A_1 genau dann, wenn sich A_3 und A_5 beide in S_1 befinden;

(2) A_2 genau dann, wenn sich A_3 und A_6 beide in S_1 befinden;

(3) A_3 genau dann, wenn sich A_4 und A_8 beide in S_2 befinden;

(4) A_4 genau dann, wenn sich A_1 und A_8 beide in S_2 befinden;

(5) A_5 genau dann, wenn sich A_6 in einem anderen Schrank befindet als A_7;

(6) A_6 genau dann, wenn sich A_4 in einem anderen Schrank befindet als A_5;

(7) A_7 genau dann, wenn sich A_1 in demselben Schrank befindet wie A_2;

(8) A_8 genau dann, wenn sich A_5 in demselben Schrank befindet wie A_7;

Ermitteln Sie alle diejenigen für eine Verteilung der acht Gegenstände auf die beiden Schränke bestehenden Möglichkeiten, bei denen alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind!

Aufgabe 251235:

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung (1) gilt:

$$\frac{x^2 + 12x + 4}{x + 2} = 6 \cdot \sqrt{x}. \tag{1}$$

Aufgabe 251236:

Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 2$ seien $2n$ Punkte P_1, ..., P_{2n} im Raum so gelegen, daß es keine Ebene gibt, auf der vier dieser Punkte liegen. Mit T sei die Menge aller derjenigen Tetraeder bezeichnet, deren vier Eckpunkte der Menge $M = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ angehören. Für jede Ebene ε, die keinen Punkt von M enthält, sei t_ε die Anzahl aller derjenigen Tetraeder aus T, die mit ε ein Viereck als Schnittfläche gemeinsam haben.

Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ den größtmöglichen Wert, den t_ε annehmen kann!