26. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1986/1987

Aufgaben

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260921:

Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n auch

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n+2} \quad \text{eine natürliche Zahl ist!}$$

Aufgabe 260922:

Peter und Heinz erzählen, daß sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x + 9,$$
$$b = 5x + 8,$$
$$c = 4x + 1$$

hatten, wobei x eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.

Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen a, b, c seiner Seitenlängen.

Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl x, für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.

Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

Aufgabe 260923:

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b, c, die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!

(1) Es gilt $b < c$.

(2) b und c sind zueinander teilerfremd.

(3) a ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.

(4) b und c sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.

(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge $A = \{4; 9; 12; a\}$ ist, ist in der Menge $B = \{13; 16; 21; b; c\}$ enthalten.

Aufgabe 260924:

Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird gefordert, daß dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite AB, die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ und die auf der Seite AB senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.

Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck ABC gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind! Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$!