26. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1986/1987

Aufgaben

26. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260931:

Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die Gleichung

$$2(a + b) = ab \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 260932:

In einer Ebene e sei ein Dreieck ABC fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB seien U, V bzw. W in dieser Reihenfolge. Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Ebene e. Spiegelt man P sowohl an U, V als auch an W, so erhält man die Bildpunkte P_U, P_V bzw. P_W.

(Unter dem Bildpunkt P_S von P bei der Spiegelung an einem Punkt S versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, daß S der Mittelpunkt der Strecke PP_S ist. Falls $P = S$ ist, ist $P_S = P$.)

Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $P_UP_VP_W$ unabhängig von der Lage des Punktes P ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks ABC!

Aufgabe 260933:

Wenn eine reelle Zahl a gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl x eine Zahl y, nämlich

$$y = \frac{x^3 + x2 + ax + 1}{x^2 + 1} \quad \text{zugeordnet.}$$

(A) Ermitteln Sie, wenn $a = -3$ gegeben ist, zwei ganze Zahlen x, deren zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind!

(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl a, für die die folgende Aussage (*) gilt!

  (*) Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.

(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl a noch eine andere reelle Zahl a gibt, für die die Aussage (*) gilt!

Aufgabe 260934:

Beweisen Sie folgenden Satz:

Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

Aufgabe 260935:

Von einem Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt:

(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

(2) Es gilt $\overline{AB} > \overline{CD}$.

(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ beträgt 90°.

Der Mittelpunkt von AB sei M, der Mittelpunkt von CD sei N.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} - \overline{CD}) \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 260936:

a) Ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ soll durch eine Ebene e, die durch den Punkt A geht, in zwei Tetraeder T_1, T_2 zerlegt werden.

Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z.B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage e in bezug auf die drei Punkte B, C, D bei derartigen Zerlegungen haben muß!

b) Beweisen Sie, daß es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen T_1 volumengleich zu T_2 wird!