26. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1986/1987

Aufgaben

26. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 261031:

Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.

(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.

(3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.

Beweisen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

Aufgabe 261032:

Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steins dieselbe Zahl steht). Insgesamt besteht hiernach ein Dominospiel aus genau 28 Steinen.

Eine *Kette* entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt *geschlossen*, wenn auch die beiden Seitenhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.

a) Ermitteln Sie die kleinste Anzahl $k > 1$ von verschiedenen Steinen eines Dominospiels, die eine geschlossene Kette bilden können!

b) Aus einem Dominospiel sollen geschlossene Ketten aus je k verschiedenen Steinen gebildet werden (k sei die in a) genannte Zahl). Dabei soll jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer dieser Ketten verwendet werden.

Ermitteln Sie die größte Anzahl g von Ketten, die so zustandekommen können!

c) Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Ketten aus je k verschiedenen Steinen, die sich überhaupt bilden lassen! (Es darf also jeder Stein des Dominospiels in beliebig vielen dieser Ketten auftreten.) Dabei gelten zwei geschlossene Ketten genau dann als gleich, wenn sie bei geeigneter Wahl eines Anfangssteins und einer Durchlaufsrichtung gleichlautende Zahlenfolgen zeigen. Beispielsweise gelten die beiden Ketten $(2,4)$, $(4,5)$, $(5,5)$, $(5,1)$, $(1,2)$ und $(5,4)$, $(4,2)$, $(2,1)$, $(1,5)$, $(5,5)$ als einander gleich.

Aufgabe 261033:

Über eine Gerade h und drei Punkte S, A, B auf h wird vorausgesetzt, daß A zwischen S und B liegt. Ferner wird über eine Gerade $g \neq h$ vorausgesetzt, daß sie h in S schneidet. Gesucht sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen a) und b) erfüllen:

a) Der Punkt P liegt auf g.

b) Der Innenwinkel $\sphericalangle SBP$ im Dreieck SBP hat dieselbe Größe wie einer der Winkel, den AP mit g bildet.

(I) Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn ein Punkt P die Bedingungen a), b) erfüllt, dann kann er (aus voraussetzungsgemäß gegebenen h, g, S, A, B) durch eine Konstruktion erhalten werden.

(II) Beschreiben Sie eine Konstruktion, für die die Aussage (I) zutrifft!

(III) Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn ein Punkt P nach der Beschreibung (II) konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen a), b).

Aufgabe 261034:
Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 \qquad (1)$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!

Geben Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen an, bei denen sich in (1) dieser Wert z ergibt!

Aufgabe 261035:
Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 5$ ist, so gilt: Wird eine Kugel von n Ebenen geschnitten, so entstehen auf der Kugeloberfläche höchstens 22 Teilflächen.

Aufgabe 261036:
Beweisen Sie, daß für jede reelle Zahl $x > 1$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right) \quad \text{gelten!}$$