26. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1986/1987

Aufgaben

26. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 261041:

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei x eine beliebig vorgegebene Streckenlänge. Die Seiten des Dreiecks ABC seien jeweils um eine Strecke dieser Länge x verlängert, und zwar BA über A hinaus bis A', CB über B hinaus bis B' und AC über C hinaus bis C'.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen das Dreieck $A'B'C'$ stets denselben Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC hat!

Aufgabe 261042:

Man ermittle die kleinste positive natürliche Zahl n, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:

(1) Es gibt genau 144 natürliche Zahlen, die Teiler von n sind.

(2) Unter den Teilern von n befinden sich 10 unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Aufgabe 261043A:

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \qquad (1)$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3, \qquad (2)$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \qquad (3)$$

Aufgabe 261043B:

a) Beweisen Sie, daß fünf paarweise verschiedene reelle Zahlen existieren, mit denen die folgende Aussage gilt!

Für jede Auswahl von drei der fünf Zahlen existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die drei ausgewählten Zahlen als Maßzahlen haben (wobei zum Messen aller drei Seitenlängen dieselbe Maßeinheit benutzt wird).

b) Ermitteln Sie, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke insgesamt sich aus diesen fünf Zahlen auf die in a) genannte Art gewinnen lassen!

c) Beweisen Sie, daß stets dann, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, mindestens eines der genannten Dreiecke spitzwinklig ist!

Aufgabe 261044:

Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ die Anzahl aller Lösungen (x, y, z, t) der Gleichung $\overline{xy} + \overline{zt} = \overline{yz}$, worin für x, y, z, t nur natürliche Zahlen mit

$$1 \leq x \leq k-1, \quad 1 \leq y \leq k-1, \quad 1 \leq z \leq k-1, \quad 1 \leq t \leq k-1$$

zugelassen sind!

Dabei bezeichnet jeweils $\overline{pq}$ diejenige Zahl, die im Positionssystem der Basis k mit den Ziffern p, q (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird.

Aufgabe 261045:

Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, 2, ... , 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, 2, ... , 6 je genau einmal vor.

Eine *Kette* entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen. Eine Kette heißt *geschlossen*, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen. Eine geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen werde kurz *Dreierkette* genannt. Zwei Dreierketten gelten genau dann als gleich, wenn sie aus den selben Steinen bestehen.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen aus je genau 7 verschiedenen Dreierketten K_1, ..., K_7 bestehenden Mengen $\{K_1, ..., K_7\}$, bei denen jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer der Ketten K_1, ..., K_7 vorkommt!

(Wie üblich heißen zwei Mengen $M = \{K_1, ..., K_7\}$ und $M' = \{K'_1, ..., K'_7\}$ genau dann einander gleich, wenn jede in der Menge M enthaltene Kette K_i auch in M' enthalten ist und umgekehrt auch jede in M' enthaltene Kette in M.)

Aufgabe 261046:

Beweisen Sie, daß es einen Körper mit den folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!

(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken

(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.

(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.

(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.