# 26. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 12
# Saison 1986/1987

Aufgaben

# 26. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 12
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 261211:

Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften (1), (2):

(1) Die Zahlen $x$, $y$, $z$ sind in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende ganze Zahlen.

(2) Es gilt: $x \cdot (x + y + z) = x \cdot y \cdot z$.

Aufgabe 261212:

Man beweise:

a) Für jedes Tripel $(a, b, c)$ positiver reeller Zahlen, für das $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, gibt es ein Dreieck mit $a$, $b$ und $c$ als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.

b) Wenn für die Zahlenwerte $a$, $b$ und $c$ der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Aufgabe 261213:

An einer internationalen Tagung nahmen jeweils genau zwei Vertreter der Ungarischen Volksrepublik, der CSSR, der VR Polen und der DDR teil. Über diese acht Teilnehmer ist bekannt:

(1) Jeder dieser Teilnehmer spricht neben seiner Muttersprache wenigstens eine Sprache aus den anderen drei genannten Teilnehmerländern. (Die Sprachen aus den vier Ländern waren ungarisch, tschechisch, polnisch, deutsch; andere Sprechen aus diesen Ländern wie etwa slowakisch oder sorbisch kamen nicht vor.)

(2) Jede der vier Sprachen wird von Teilnehmern aus genau drei der genannten Länder gesprochen.

(3) Jeder der Teilnehmer, der polnisch spricht, spricht auch ungarisch, jedoch nicht deutsch.

(4) Die Sprachkenntnisse der beiden polnischen Teilnehmer unterscheiden sich in bezug auf die vier genannten Sprachen voneinander.

a) Man ermittle, wie viele der genannten Teilnehmer insgesamt deutsch sprechen und aus welchen Ländern diese Teilnehmer kamen.

b) Man ermittle, welche Sprachen die beiden Teilnehmer aus der UVR sprachen.

Aufgabe 261214:

Für jede reelle Zahl $b$ sei $(a_n)$ diejenige Zahlenfolge, die durch

$$a_n = \frac{3n + b}{2n - 1} \quad (n = 1, 2, ...) \tag{1}$$

definiert ist.

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen $b$, für die die durch (1) definierte Zahlenfolge genau drei Glieder besitzt, die die Ungleichungen

$$1,45 < a_n < 1,47 \tag{2}$$

erfüllen. Zu jeder so ermittelten Zahl $b$ (falls es eine solche gibt) gebe man die drei Glieder $a_n$ an, die (2) erfüllen.