26. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1986/1987

Aufgaben

26. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 261241:

500 Bonbons sollen unter Verwendung von Umhüllungen passender Größen so zu einem Scherzpaket zusammengepackt werden, daß die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt sind. Dabei soll sich (2) auf jede Möglichkeit beziehen, alle Bonbons auszupacken, indem man nach und nach jeweils eine zugängliche Umhüllung öffnet und entfernt (falls mehrere Umhüllungen zugänglich sind, in beliebiger Reihenfolge):

(1) Es gibt genau eine Umhüllung, die das gesamte Paket enthält.

(2) Beim Öffnen dieser und jeder weiteren Umhüllung zeigt sich, daß deren Inhalt entweder aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen oder aus genau einem nicht umhüllten Bonbon besteht.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Umhüllungen, die ein solches Paket aufweisen kann!

Aufgabe 261242:

Man ermittle alle diejenigen Zahlenfolgen (a_n) mit $n = 1, 2, 3, ...$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:

(1) Für alle ganzen Zahlen m, n mit $n > m > 0$ gilt $a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_n^2 - a_m^2$.

(2) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 261243:

Es seien $k_1, ..., k_n$ Kugelkörper, jeder einschließlich seiner Randpunkte verstanden. Diese Kugeln seien beliebig im Raum gelegen; es sei auch zugelassen, daß sie einander durchdringen oder berühren. Die Vereinigungsmenge der k_i habe das Volumen V.

Man beweise, daß es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl aus den Kugeln k_i so zu treffen, daß je zwei der ausgewählten Kugeln keinen gemeinsamen Punkt haben und daß die Vereinigungsmenge der ausgewählten Kugeln ein Volumen $U \geq \frac{1}{27}V$ hat.

Aufgabe 261244:

Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl a, für die $(a+1)^5 - a^5 - 1$ durch 18 305 teilbar ist.

Aufgabe 261245:

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, mit denen die folgende Aussage gilt:

> Jede ebene konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2...A_n$ wird vollständig überdeckt von den Flächen der n Kreise, die die Strecken A_iA_{i+1} als Durchmesser haben ($i = 1, 2, ..., n$; es sei $A_{n+1} = A_1$ gesetzt).

Dabei sei jede n-Ecksfläche und jede Kreisfläche einschließlich ihrer Randpunkte verstanden.

Aufgabe 261246A:

Im Mathematiklager schlägt ein Zirkelleiter den n Schülern ($n \geq 3$) seiner Gruppe vor, den Schüler, der den Tafeldienst wahrzunehmen hat, nach folgender Methode auszuwählen:

Die Schüler werden mit P_1, P_2, ..., P_n numeriert und stellen sich in dieser Reihenfolge im Kreis auf. Dabei folgt (im Umlaufsinn P_1, P_2, ...) auf P_n wieder P_1. Durch Münzwurf wird zunächst entschieden, ob P_1 oder P_2 aus dem Kreis ausscheidet. Liegt *Wappen* oben, so scheidet P_1 aus, bei *Zahl* P_2. Danach wird der Ausscheid mit denjenigen beiden noch nicht ausgeschiedenen Schülern fortgesetzt, die auf den soeben zuletzt ausgeschiedenen Schüler im genannten Umlaufsinn folgen. Bei *Wappen* scheidet wieder der in dem Umlaufsinn erste von diesen beiden aus, bei *Zahl* der zweite. Dies wird solange wiederholt, bis nur noch ein Schüler übrigbleibt, der dann als Diensthabender bestimmt wird.

a) Man berechne im Fall $n = 3$ die Wahrscheinlichkeit W_1, W_2, W_3 dafür, daß P_1, P_2 bzw. P_3 als Diensthabende bestimmt werden.

b) Man beweise für jedes $n \geq 3$, daß die Auswahlmethode ungerecht ist, d.h. daß die Wahrscheinlichkeit, als Diensthabender bestimmt zu werden, nicht für alle Schüler P_1, P_2, ..., P_n gleich ist.

Bemerkung: Tritt irgendein zufälliges Ereignis A als Folge irgendeines von m Ereignissen aus einer Gesamtzahl von N möglichen Ereignissen (die einander ausschließen und gleichwahrscheinlich sind) ein, so bezeichnet man als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A die Zahl $p = \frac{m}{N}$.

Aufgabe 261246B:

Es seien x_1, x_2, ..., $x_{1\,987}$ nichtnegative reelle Zahlen, für die die Summe der Quadrate gleich 10 und die Summe der dritten Potenzen größer als 1 ist.

Untersuchen Sie, ob es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl

a) von 9 dieser Zahlen

b) von 10 dieser Zahlen

so zu treffen, daß die Summe der ausgewählten Zahlen größer als 1 ist!

(Kommt eine Zahl mehrmals unter den x_1, x_2, ..., $x_{1\,987}$ vor, so darf sie auch höchstens ebenso oft unter die ausgewählten Zahlen aufgenommen werden.)