27. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1987/1988

Aufgaben

27. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270731:

Vier Mannschaften, A, B, C und D, trugen ein Fußballturnier aus. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft. Jedes gewonnene Spiel wurde mit 2 Punkten für die Siegermannschaft und mit 0 Punkten für die Verlierermannschaft gewertet, jedes unentschiedene Spiel für beide Mannschaften mit je 1 Punkt. Weiterhin ist folgendes bekannt:

(1) Keine Mannschaft blieb ohne Punkte.

(2) Mannschaft A konnte ihren Turniersieg aus dem vorigen Jahr nicht wiederholen, erreichte aber eine höhere Gesamtpunktzahl als Mannschaft B.

(3) Mannschaft C gewann kein Spiel, erreichte jedoch eine geradzahlige Gesamtpunktzahl.

(4) Mannschaft D spielte in keinem ihrer Spiele unentschieden und gewann gegen B sowie gegen den Turniersieger des vorigen Jahres.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, welche Punktzahlen jedes Spiel des Turniers den einzelnen Mannschaften erbrachte und welche Gesamtpunktzahlen sie erreichten!

Ist das der Fall, so trage die Punktzahlen in die folgende Tabelle ein!

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen				Erreichte Gesamtpunktzahl
	A	B	C	D	
A	-				
B		-			
C			-		
D				-	

Aufgabe 270732:

In einem Betrieb werden Erzeugnisse hergestellt, bei denen die Herstellungskosten für jedes Stück $19,20$ M betragen. Der Betrieb hat die Möglichkeit, für $13\,500$ M eine neue Werkzeugmaschine anzuschaffen; mit dieser Maschine würden die Herstellungskosten für jedes Stück nur noch $13,15$ M betragen.

Ein Planziel lautet: Die Summe aus den Anschaffungskosten der neuen Maschine und aus den Herstellungskosten der damit in 3 Jahren hergestellten Erzeugnisse soll weniger als 80% derjenigen Herstellungskosten betragen, die (für ebensoviele Erzeugnisse) ohne Nutzung der neuen Maschine entstehen würden.

Ermittle die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der dieses Planziel zu erreichen ist!

Aufgabe 270733:

Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem die Größe γ des Winkels $\sphericalangle ACB$ kleiner ist als die Größe β des Winkels $\sphericalangle ABC$. Gefordert seien die folgenden von einem Punkt P zu erfüllenden Bedingungen (1) und (2):

(1) P liegt auf der Strecke AC.

(2) Der Winkel $\sphericalangle APB$ hat die Größe 2γ

a) Beschreibe hierzu eine Konstruktion; zeige, daß sie zu jedem Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ genau einen Punkt P liefert und daß die beiden folgenden Aussagen b) und c) gelten!

b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann wird er durch die beschriebene Konstruktion erhalten.

c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, dann erfüllt er die Bedingungen (1) und (2).

Aufgabe 270734:

Ermittle alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y, für die

$$x^2 + xy + y^2 = 49$$

gilt!

Aufgabe 270735:

In einem Dreieck ABC seien CD und BE die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ bzw. $\sphericalangle ABC$. Der Schnittpunkt dieser Strecken CD, BE sei S. Wie üblich bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$. Vorausgesetzt werde nun, daß der Winkel $\sphericalangle BSD$ die Größe 4α hat.

Weise nach, daß durch diese Voraussetzung die Winkelgröße α eindeutig bestimmt ist, und ermittle α!

Aufgabe 270736:

In einem Dreieck ABC seien AD, BE und CF die drei Seitenhalbierenden. Sie gehen bekanntlich durch einen gemeinsamen Punkt S.

Beweise, daß für jedes Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Aussage gilt:

Alle sechs Dreiecke BDS, DCS, CES, EAS, AFS, FBS haben denselben Flächeninhalt!