27. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1987/1988

Aufgaben

27. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 271031:

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) x und y sind dreistellige natürliche Zahlen.

(2) Die drei Ziffern von x sind sämtlich voneinander verschieden.

(3) Die drei Ziffern von x sind auch die drei Ziffern von y, nur in anderer Reihenfolge.

(4) Es gilt $x - y = 45$.

Aufgabe 271032:

Es sei a eine gegebene positive reelle Zahl. Von einer Funktion f, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, werde vorausgesetzt, daß sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

(1) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) + f(x + a) = 1$.

(2) Es gibt eine reelle Zahl c, so daß für alle reellen Zahlen x, die $c < x \leq c + a$ erfüllen, $f(x) > \frac{1}{2}$ gilt.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Funktion f ist periodisch; es gibt eine kleinstmögliche Periode von f. Ermitteln Sie diese kleinstmögliche Periode von f.

Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl p gibt, so daß für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x + p) = f(x)$ gilt. Ist das der Fall, so heißt jede positive reelle Zahl p, mit der dies gilt, eine Periode von f.

Aufgabe 271033:

Vier Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten M_1 bis M_4 und den Radien r_1 bis r_4 mögen so in einer Ebene E_1 liegen, daß sich k_1, k_2 und k_3 paarweise von außen berühren. Außerdem berührt k_4 die Kreise k_2 und k_3 ebenfalls von außen und hat mit k_1 keinen Punkt gemeinsam.

Die Kreise seien die Grundflächen von vier geraden Kreiskegeln mit den Höhen h_1 bis h_4 und den Spitzen S_1 bis S_4. Die Punkte S_1, S_2 und S_3 mögen auf der gleichen Seite von E_1 (d.h. im gleichen Halbraum bezüglich E_1) liegen.

Folgende Maße seien gegeben: $r_1 = r_4 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm, $h_1 = 1$ cm, $h_2 = 2{,}1$ cm, $h_3 = 4{,}6$ cm. Nun sollen S_1, S_2, S_3 und S_4 in einer Ebene E_2 liegen.

Wie groß muß dann h_4 sein?

Aufgabe 271034:

Ermitteln Sie alle diejenigen positiven reellen Zahlen x, für die $x^{2x} = \frac{1}{2}$ gilt!

Aufgabe 271035:

Es sei ABC ein Dreieck, der Mittelpunkt von AB sei S, der Mittelpunkt von CS sei M, der Schnittpunkt von BC mit der Geraden durch A und M sei P.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $\overline{BP} : \overline{PC}$ und $\overline{AM} : \overline{MP}$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.

Aufgabe 271036:

Eine Ebene E sei durch vertikale und horizontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt (Abbildung a). Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm, 2 cm (Abbildung b) so ausgefüllt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

Kein Punkt der Ebenen soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen. Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke in kleinere Flächenstücke.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

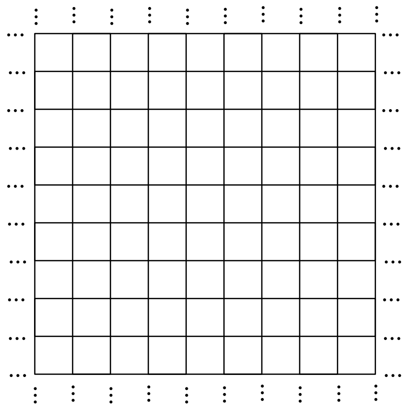

Abbildung a)

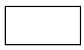

Abbildung b)