27. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1987/1988

Aufgaben

27. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 271041:

Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

Aufgabe 271042:

Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1, x_2 die folgenden Gleichungen erfüllt:

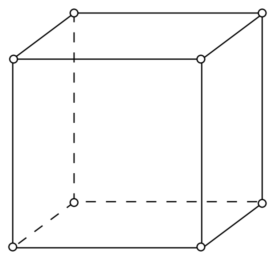
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3) \quad (1)$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \quad (2)$$

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2 + \sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Aufgabe 271043A:

Die Abbildung wird gewöhnlich als das Bild eines Würfels oder jedenfalls eines achteckigen Körpers in schräger Parallelprojektion angesehen.



Zeigen Sie, daß dies aber auch sowohl das Bild eines zehneckigen als auch das Bild eines zwölfeckigen Körpers in schräger Parallelprojektion sein kann!

Zeichnen Sie zu diesem Zweck je einen solchen Körper in einer neu gewählten schrägen Parallelprojektion, bei der alle zehn bzw. alle zwölf Eckpunkte des Körpers als voneinander verschiedene Bildpunkte erscheinen!

Geben Sie ferner zu jedem der beiden Körper eine Aufzählung aller Eckpunkte, aller Kanten und aller ebenen Teilflächen seiner Oberfläche an, und nennen Sie eine Gerade in einer Projektionsrichtung, bei der die Abbildung entstehen würde! Eine weitere Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 271043B:

Ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ besagt: Aus einem Näherungswert $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b positive ganze Zahlen sind, wird ein neuer Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ nach der Vorschrift

$$a' = a^2 + 2b^2, \quad (1)$$

$$b' = 2ab \quad (2)$$

gewonnen. Um einschätzen zu können, ob $\frac{a}{b}$ ein geeigneter Anfangswert für dieses Verfahren sein kann, behandelt man die folgende Aufgabe (bei der die Zahl $\sqrt{2}$ wie ein bekannter Wert verwendet wird): Man ermittle alle diejenigen $\frac{a}{b}$ (a, b positive ganze Zahlen), bei denen die Vorschrift (1), (2) auf einen besseren Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ führt, d.h.

$$\left|\frac{a'}{b'} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right| \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 271044:

Ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 10\,\text{cm}$ und ein Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \frac{10}{\sqrt{2}}\,\text{cm}$ seien so in einer Ebene gelegen, daß der Mittelpunkt von k_2 außerhalb von k_1 liegt und daß sich k_2 in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, für die $\overline{P_1P_2} = 10\,\text{cm}$ gilt.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des gemeinsamen Flächenstücks der beiden Kreisflächen!

Hinweis: Entsprechend wie bei der obigen Angabe von r_2 soll die zahlenmäßige Angabe von A erfolgen, ohne dabei Näherungswerte (z.B. endliche Dezimalbrüche) für irrationale Zahlen zu verwenden.

Aufgabe 271045:

Worte aus den Buchstaben E, R und S sollen nach folgenden Regeln aus einem zu Anfang vorgegebenen Wort gebildet werden: (

(1) Endet das Wort auf S, so kann ein R angefügt werden.

(2) An ein Wort darf dasjenige Wort angefügt werden, welches aus den gleichen Buchstaben, aber in umgekehrter Reihenfolge besteht.

(3) Treten in einem Wort drei gleiche Buchstaben unmittelbar hintereinander auf, dann dürfen sie durch ein R ersetzt werden.

(4) Zwei aufeinanderfolgende R oder E dürfen weggelassen werden.

Eine beliebige Wahl der Reihenfolge und beliebig häufige Wiederholung der Regelanwendung sind zugelassen.

Ist es möglich, durch genügend häufige Anwendung dieser Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten?

Aufgabe 271046:

Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn für reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 gilt, daß jede dieser Zahlen im Intervall $5 \leq x \leq 10$ liegt, dann gilt für diese Zahlen stets

$$\begin{aligned} 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_5b_5 &\leq a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + ... + a_5^2 + b_5^2 \\ &\leq \frac{5}{2} \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_5b_5). \end{aligned}$$