27. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1987/1988

Aufgaben

27. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 271241:

In einer Ebene sei G die Menge aller derjenigen Punkte, deren rechtwinklige kartesische Koordinaten ganze Zahlen sind. Ferner sei F die Menge von 1 988 verschiedenen Farben.

Man beweise: Für jede Verteilung von Farben, bei der jeder Punkt aus G genau eine der Farben aus F enthält, gibt es in G vier gleichfarbige Punkte, die die Ecken eines Rechtecks mit achsenparallelen Seiten sind.

Aufgabe 271242:

Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x,\ y,\ z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$1 \cdot x^3 + 9 \cdot y^2 + 8 \cdot y + 8 = 1\,988, \tag{1}$$
$$1 \cdot y^3 + 9 \cdot z^2 + 8 \cdot z + 8 = 1\,988, \tag{2}$$
$$1 \cdot z^3 + 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 8 = 1\,988. \tag{3}$$

Aufgabe 271243:

Wieviel verschiedene Wörter $(a_1 a_2 a_3 ... a_{n-1} a_n)$ kann man insgesamt aus den Buchstaben $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i = 1, ..., n$ derart bilden, daß

$$|a_j - a_{j+1}| = 1$$

für $j = 1, ..., n-1$ gilt?

Aufgabe 271244:

Durch ein konvexes n-Eck $P_1 P_2 ... P_n$, das einen Inkreis c besitzt, sei eine Gerade g gelegt, die die Seite $P_n P_1$ in einem Punkt M und eine Seite $P_k P_{k+1}$ $(1 \leq k < n)$ in einem Punkt N schneidet.

Die Gerade g sei so gelegt, daß sie sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des n-Ecks halbiert, d.h., daß die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:

(1) Die Längen der Streckenzüge $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.

(2) Die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.

Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt des Kreises c.

Aufgabe 271245:
Es sei (x_n) die durch

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 1,$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4}$$

$(n = 2, 3, 4, ...)$ definierte Zahlenfolge. Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls dies zutrifft, ihren Grenzwert.

Aufgabe 271246A:
Alfred und Bernd teilen sich n Äpfel, indem der Reihe nach für jeden einzelnen Apfel durch eine Zufallsentscheidung (z.B. Werfen einer Münze festgelegt wird, wer diesen Apfel erhält. Ein solcher Verteilungsvorgang heiße für Alfred *günstig* genau dann, wenn Alfred nicht nur am Ende sondern während des gesamten Vorganges niemals weniger Äpfel in seinem Besitz hat als Bernd.

Als Wahrscheinlichkeit $w(n)$ dafür daß ein Verteilungsvorgang für Alfred günstig ist, bezeichnet man den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Anzahl aller für Alfred günstigen Verteilungsvorgänge durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Verteilungsvorgänge dividiert wird.

(a) Man ermittle $w(4)$.

(b) Man ermittle $w(n)$ für beliebiges natürliches $n \geq 2$.

Aufgabe 271246B:
Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und für je n im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktionen $f_1, f_2, ..., f_n$ gibt es reelle Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 1$ $(i = 1, ..., n)$, für die

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \quad \text{gilt.}$$