28. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

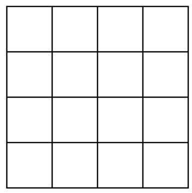
Aufgabe 280931:

Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Beweisen Sie, daß in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

Aufgabe 280932:

In jedes der 16 Felder eines 4×4-Quadrates (siehe Abbildung) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.



Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in eine andere überführt.

Aufgabe 280933:

Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide $P = ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ eine Ebene e so gibt, daß die Schnittfigur von P mit e ein gleichseitiges Dreieck ist!

Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide P eine solche Ebene e, so ist für eine Pyramide P diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene e, so ist anzugeben, wie eine Ebene e gefunden werden kann und daß jede so gefundene Ebene e die geforderte Bedingung erfüllt.

Aufgabe 280934:

Beweisen Sie, daß für beliebige positive reellen Zahlen x und y stets die Ungleichung

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6} \qquad \text{gilt!}$$

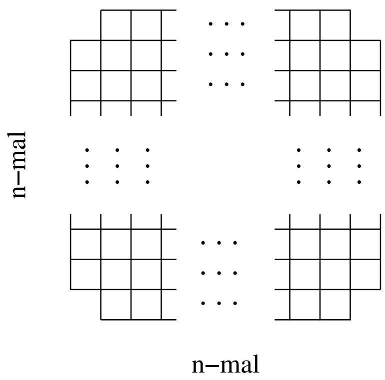
Aufgabe 280935:

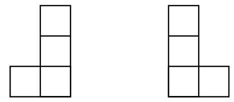
Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck $ABCD$ gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht!

Aufgabe 280936:

Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Abbildung) vollständig so in Teile zu zerlegen, daß jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!

Hinweis: Es ist auch zugelassen, daß in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.





(a) (b)