28. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 281011:

a) Bernd hörte, daß der Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) nachwies:

   Für jede ganze Zahl x mit $-40 < x < 41$ ist die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Bernd wollte dies für mindestens zehn dieser Zahlen nachrechnen.

   Rechnen Sie dies ebenfalls für mindestens zehn dieser Zahlen nach!

b) Untersuchen Sie, ob sogar für jedes ganzzahlige x die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl ist!

Aufgabe 281012:
Antje will alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z ermitteln, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die erste und die zweite Ziffer von z sind einander gleich.

(2) Die dritte und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

(3) Die Zahl z ist eine Quadratzahl.

Antje will diese Aufgabe lösen, ohne eine Zahlentafel, einen Taschenrechner oder einen anderen Rechner zu benutzen. Wie kann sie vorgehen?

Aufgabe 281013:
Gegeben sei eine regelmäßige, fünfseitige, gerade Pyramide P mit der Höhenlänge $h = 10\,\text{cm}$. Durch einen ebenen Schnitt, der parallel zur Grundfläche verläuft, soll von dieser Pyramide eine wiederum regelmäßige, fünfseitige und gerade Pyramide $P*$ abgetrennt werden, deren Volumen $V*$ ein Drittel des Volumens V der ursprünglichen Pyramide P ist. Wie groß ist die Höhenlänge h* dieser abgetrennten Pyramide P*?

Hinweis : Schätzen Sie vor der Berechnung das zu erwartende Ergebnis! Wird es

a) zwischen 2 cm und 4 cm,

b) zwischen 4 cm und 6 cm,

c) zwischen 6 cm und 8 cm,

d) zwischen 8 cm und 9 cm

liegen?

Aufgabe 281014:

Wenn Frank große natürliche Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7 untersucht, geht er folgendermaßen vor:

Von rechts beginnend teilt er die Zahl in Gruppen zu je drei Ziffern ein. (Damit auch die links stehende Gruppe aus drei Ziffern besteht, wird sie nötigenfalls durch Davorsetzen von einer oder zwei Ziffern 0 ergänzt.)

In jeder Gruppe addiert Frank zur rechts stehenden Ziffer das Dreifache der mittleren und das Doppelte der linken Ziffer. So erhält er *Gruppensummen*; diese versieht er (von rechts beginnend) abwechselnd mit den Vorzeichen + und −. Schließlich addiert er alle so abgewandelten *Gruppensummen* und erhält damit eine *Gesamtsumme*. Diese kann man leicht auf ihre Teilbarkeit durch 7 überprüfen. *1. Beispiel:* Zu untersuchen sei die Zahl 45 893 127, in Gruppen 045 893 127.

Die Gruppe 127 hat die Gruppensumme $7 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 15$,

die Gruppe 893 hat die Gruppensumme $3 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 46$,

die Gruppe 045 hat die Gruppensumme $5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 17$.

Als Gesamtsumme ergibt sich die Zahl $+15 - 46 + 17 = -14$; diese ist durch 7 teilbar.

em 2. Beispiel: Zu der Zahl 45 693 127 findet man entsprechend die Gesamtsumme $+15 - 42 + 17 = -10$; diese ist nicht durch 7 teilbar.

Frank sagt nun, bei seinem Verfahren gelte stets: Genau dann, wenn die *Gesamtsumme* durch 7 teilbar ist, ist es auch die ursprüngliche Zahl.

Beweisen Sie diese Aussage!