28. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 281021:

Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und die durch 450 teilbar ist.

Aufgabe 281022:

Weisen Sie nach, daß es genau eine quadratische Funktion f gibt, die die Bedingung

$$\frac{f(x)+f(x+2)}{6} = x^2 - 3 \qquad (1)$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt, und daß diese Funktion zwei ganzzahlige Nullstellen hat!

Aufgabe 281023:

Über einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 werde vorausgesetzt, daß k_2 durch M_1 geht, aber nicht ganz in der Fläche des Kreises k_1 liegt. Derjenige Schnittpunkt von k_1 mit der Geraden g durch M_1, M_2, der dann im Innern von k_2 liegt, sei S. Ferner sei P_2 einer der Schnittpunkte, die k_2 mit der in S auf g errichteten Senkrechten hat.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets folgende Aussage gilt:

Diejenige von P_2 an k_1 gelegte Tangente t, die k_1 in einem von S verschiedenen Punkt P_1 berührt, ist auch Tangente an k_2.

Aufgabe 281024:

Gegeben sei ein Halbkreis. Gesucht sind Vierecke, die die folgenden Bedingungen (1) bis (3) erfüllen:

(1) Zwei Eckpunkte des Vierecks liegen auf dem Durchmesser des Halbkreises, die beiden anderen Eckpunkte liegen auf dem Halbkreisbogen.

(2) Das Viereck ist ein Rechteck.

(3) Seine Seitenlängen verhalten sich wie $\sqrt{3} : 2$.

a) Beschreiben Sie eine Konstruktion, durch die man zwei verschiedene Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $P_2Q_2R_2S_2$ erhält!

b) Führen Sie die beschriebene Konstruktion aus!

c) Beweisen Sie, daß die nach Ihrer Beschreibung konstruierten Vierecke die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen!