28. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 281031:

Für jede natürliche Zahl n werde ihre Zifferndarstellung mit der Basis 2 (Darstellung als Dualzahl), ferner ihre Zifferndarstellung mit der Basis 3 u.s.w. ..., schließlich ihre Zifferndarstellung mit der Basis 10 (Darstellung als Dezimalzahl) betrachtet.

Wenn es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, bei denen in jeder dieser Zifferndarstellungen (mit den Basen 2, 3, 4, ..., 10) die letzte Ziffer (Einerziffer) eine 1 ist, so ermittle man die kleinste derartige natürliche Zahl n.

Aufgabe 281032:

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (f, g) von Funktionen f und g, die für alle reellen Zahlen definiert sind und die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) f ist eine quadratische Funktion, in deren Darstellung $y = f(x)$ der bei x^2 stehende Koeffizient 1 beträgt.

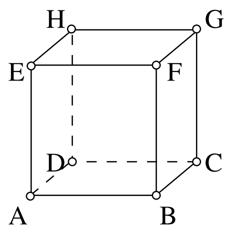
(2) Für alle reellen x gilt $f(x + 1) = g(x)$.

(3) f hat genau eine reelle Nullstelle.

(4) Es gilt $g(5) = 4$.

Aufgabe 281033:

Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel der Kantenlänge 6 cm. Auf der Seitenfläche $ABFE$ sei P derjenige Punkt, der von EF den Abstand 1 cm und von BF den Abstand 2 cm hat (siehe Abbildung).



Ermitteln Sie die Menge M aller derjenigen Punkte auf der Oberfläche des Würfels, die von P aus erreichbar sind, jeweils längs eines auf der Oberfläche verlaufenden Weges, der höchstens die Länge 4 cm hat!

Hinweis : Die gesuchte Menge M ist als Vereinigungsmenge von Flächenstücken auf den einzelnen Seitenflächen des Würfels nachzuweisen. Jedes dieser Flächenstücke ist durch Angabe seiner Randkurve zu beschreiben; die Beschreibung ist so anzulegen, daß sie die Möglichkeit einer konstruktiven Gewinnung der einzelnen Teile solcher Randkurven vermittelt.

Aufgabe 281034:

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die die folgenden Gleichung (1) erfüllen!

$$a^3 - b^3 - a^2 + b^2 + a - b = 0 \qquad (1)$$

Aufgabe 281035:

Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5\,\text{cm}$, $s = 16,8\,\text{cm}$ und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.

(2) Die Seitenlänge $c = \overline{AB}$ und $a = \overline{BC}$ haben die Summe $c + a = s$.

(3) Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe γ.

I. Beweisen Sie, daß jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!

II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!

III. Beweisen Sie, daß jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!

IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Anzahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenanten Fall diese Zahl!

Aufgabe 281036:

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine $(n + 2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.

Hinweis : Die Verwendung eines - nicht programmierbaren - Taschenrechners ist gestattet.