28. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 281041:

Zeigen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl n gibt, mit der $2^8 + 2^{11} + 2^n$ eine Quadratzahl ist!

Aufgabe 281042:

Zeigen Sie, daß es ein Paar von Funktionen f, g gibt, für das folgende Aussagen gelten:

(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es ist $f(0) = 7$.

(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x)\cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.

Aufgabe 281043A:

Man denke sich die natürlichen Zahlen, beginnend mit 41, so spiralförmig angeordnet, wie aus der Abbildung als Anfang einer solchen Anordnung zu erkennen ist:

Beweisen Sie, daß (bei dieser Anordnung) in der Diagonale, von der in der Abbildung die Zahlen 61, 47, 41, 43, 53 auftreten, mindestens 30 Primzahlen stehen!

$$\begin{tikzcd}
 & 50 \arrow[r] & 51 \arrow[r] & 52 \arrow[r] & 53 \arrow[d] \\
 & 49 \arrow[u] & 42 \arrow[r] & 43 \arrow[d] & 54 \arrow[d] \\
\vdots & 48 \arrow[u] & 41 \arrow[u] & 44 \arrow[d] & 55 \arrow[d] \\
62 \arrow[u] & 47 \arrow[u] & 46 \arrow[l] & 45 \arrow[l] & 56 \arrow[d] \\
61 \arrow[u] & 60 \arrow[l] & 59 \arrow[l] & 58 \arrow[l] & 57 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 281043B:

Über 13 sonst beliebige Punkte in einer Ebene werde vorausgesetzt, daß sich unter je drei dieser 13 Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres sieben der 13 Punkte enthält.

b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

Aufgabe 281044:

Beweisen Sie, daß für keine reelle Zahl x die Gleichung $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$ gilt!

Aufgabe 281045:

In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, daß g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und daß k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft.

Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.

Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage. Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, daß ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.

Aufgabe 281046:

Beweisen Sie, daß zu jedem Quadrupel $(a,\, b,\, c,\, d)$ positiver reeller Zahlen, für das $a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ gilt, ein Tripel $(x,\, y,\, z)$ reeller Zahlen existiert, das die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} &= d,\\ \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} &= d,\\ \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} &= d\end{aligned}$$

erfüllt!